



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA PODNIKATELSKÁ**

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

**ÚSTAV INFORMATIKY**

INSTITUTE OF INFORMATICS

**AUTONOMNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH UŽITÍ V  
EKONOMII**

AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR USE IN ECONOMICS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Katarína Škrabáková

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

**BRNO 2017**

# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav informatiky  
Studentka: **Katarína Škrabáková**  
Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice  
Studijní obor: Matematické metody v ekonomice  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává bakalářskou práci s názvem:

## **Autonomní diferenciální rovnice a jejich užití v ekonomii**

### **Charakteristika problematiky úkolu:**

Úvod  
Cíle práce, metody a postupy zpracování  
Teoretická východiska práce  
Analýza současného stavu  
Vlastní návrhy řešení  
Závěr  
Seznam použité literatury  
Přílohy

### **Cíle, kterých má být dosaženo:**

Sestavení některých vybraných ekonomických modelů (popis výrobního procesu, Walrasovský model cenového přizpůsobení, Goodwinův růstový cyklus apod.) ve tvaru lineárních i nelineárních spojitých dynamických systémů. Pro tyto modely bude provedena analýza řešení a jejich vlastností, zejména se zaměřením na stabilitu rovnovážných řešení a existenci periodických řešení.

### **Základní literární prameny:**

GANDOLFO, G. Economic dynamics: Methods and models. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 1985. 571 s. ISBN 0-444-85419-3.

KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012. 207 s. ISBN 978-80-210-5815-6.

LYNCH, S. Dynamical systems with applications using MATLAB. 2nd ed. Cham: Birkhäuser, 2014. 514 s. ISBN 978-3-319-06819-0.

TU, P. N. V. Dynamical systems, an introduction with applications in economics and biology. 2nd ed.  
Berlin: Springer, 1994. 314 s. ISBN 3-540-57661-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně dne 28.2.2017

L. S.

---

doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.  
ředitel

---

doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.  
děkan

## **Abstrakt**

Táto bakalárska práca sa zaoberá autonómnymi diferenciálnymi rovnicami a ich využitím v ekonomike. V práci je sformulovaných niekoľko ekonomických modelov, a to Walrasov model cenového prispôsobenia, Goodwinov model hospodárskeho cyklu, dva modely ekonomického rastu - Harrodov-Domarov a Solowov-Swanov. Všetky tieto modely sú podrobené matematickej analýze a ich riešenia sú doplnené o príslušnú ekonomickú interpretáciu. V prípade Walrasova modelu je diskutovaných niekoľko kvalitatívne odlišných typov dopytu.

## **Abstract**

This thesis focuses on autonomous differential equations and their application to economics. There are four economic models formulated in this thesis - the Walrasian auctioneer model, Goodwin's Growth Cycle Model, and two models of economic growth, the Harrod-Domar model and the Solow-Swan model. All the models are subjected to rigorous mathematical analysis and complemented with appropriate economic interpretations. Specifically for the Walrasian general equilibrium model, several qualitatively different types of demand are discussed.

## **kľúčové slová**

Autonómne diferenciálne rovnice, Stacionárny bod, Walrasov model, Modely ekonomického rastu, Goodwinov model

## **key words**

Autonomous differential equations, Stationary point, The Walras model, Models of growth, The Goodwin model

**Bibliografická citácia**

ŠKRABÁKOVÁ, K. *Autonomní diferenciální rovnice a jejich užití v ekonomii*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2017. 72 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Petr Tomášek, Ph.D..

### **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že predložená bakalárska práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné, že som v svojej práci neporušila autorské práva (v zmysle Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom a o právach súvisiacich s právom autorským).

V Brne dňa 30.mája 2017

.....  
Katarína Škrabáková

### **Pod'akovanie**

Rada by som pod'akovala vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. Ing. Petrovi Tomáškovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady a podnetné pripomienky, ktorými prispel k vypracovaniu tejto práce.

# Obsah

<b>ÚVOD</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>CIELE PRÁCE, METÓDY A POSTUPY SPRACOVANIA</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1 Základné pojmy . . . . .	12
1.2 Vybrané typy diferenciálnych rovníc . . . . .	14
1.3 Stacionárne body diferenciálnej rovnice . . . . .	16
1.4 Autonómne systémy . . . . .	18
1.5 Stacionárne body autonómneho systému a ich klasifikácia . . . . .	20
<b>2 ANALÝZA SÚČASNÉHO STAVU</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1 Walrasov model cenového prispôsobenia . . . . .	24
2.1.1 Zavedenie modelu . . . . .	25
2.1.2 Matematická analýza riešenia modelu . . . . .	27
2.1.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu . . . . .	28
2.2 Harrodov-Domarov model ekonomického rastu . . . . .	28
2.2.1 Zavedenie modelu . . . . .	29
2.2.2 Matematická analýza riešenia modelu . . . . .	31
2.2.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu . . . . .	33
2.3 Solowov-Swanov neoklasický model ekonomického rastu . . . . .	34
2.3.1 Zavedenie modelu . . . . .	35
2.3.2 Matematická analýza riešenia modelu . . . . .	38
2.3.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu . . . . .	39
2.3.4 Leontiefova produkčná funkcia . . . . .	41
2.4 Goodwinov model hospodárskeho cyklu . . . . .	43
2.4.1 Zavedenie modelu . . . . .	44
2.4.2 Matematická analýza riešenia modelu . . . . .	46
2.4.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu . . . . .	48
<b>3 VLASTNÉ NÁVRHY RIEŠENÍ</b> . . . . .	<b>49</b>



Analýza Walrasovho modelu cenového prispôsobenia . . . . .	49
3.1 Dopyt daný konštantnou funkciou . . . . .	50
3.2 Dopyt daný lineárnou funkciou . . . . .	53
3.3 Dopyt daný kvadratickou funkciou . . . . .	56
3.4 Dopyt daný exponenciálnou funkciou . . . . .	62
<b>ZÁVER . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>ZOZNAM TABULIEK . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>ZOZNAM OBRÁZKOV . . . . .</b>	<b>71</b>

# ÚVOD

Ľudia sa odjakživa snažili predpovedať budúcnosť a zistiť, čo ich čaká. Správna predpoveď počasia či dobrý odhad úrody im pomohol pripraviť sa na budúce udalosti. Predpoveď budúcnosti je pre nás stále veľmi zaujímavá. Z ekonomickej oblasti nás zaujíma napríklad vývoj ekonomiky, zmeny v hodnote akcií či nárast nezamestnanosti. Vývoj ekonomiky a ekonomických veličín sa síce nedá presne predpovedať, ale môžeme ho odhadnúť. Na odhad budúceho vývoja ekonomiky ako celku musíme najskôr odhadnúť budúce správanie jednotlivých ekonomických subjektov.

Pre popísanie správania jednotlivých subjektov a odhadnutie budúcnosti používame ekonomické modely. Tieto modely sú veľmi subjektívnymi popismi ekonomickej reality, ktoré majú jednu vec spoločnú: ekonomické správanie popisujú prostredníctvom matematického aparátu. Dosiahnuť dostatočne exaktné vyjadrenie nie je možné iba pomocou slovného alebo grafického vyjadrenia.

V tejto bakalárskej práci sa budeme zaoberať modelmi, ktoré sa dajú popísať pomocou autonómnych diferenciálnych rovníc a ich sústav. Úvodná kapitola sa zaoberá problematikou autonómnych diferenciálnych rovníc a ich riešení. Teoretické poznatky sú obohatené o vlastné postrehy a príklady. Po tejto rýdzo matematickej časti práce sa pokúsime aplikovať získané poznatky na niekoľkých ekonomických modeloch, konkrétne na Walrasovom modeli cenového prispôsobenia, Harrodovom-Domarovom modeli a Solowovom-Swanovom modeli ekonomického rastu, a Goodwinovom modeli hospodárskeho cyklu. Jednotlivé modely najskôr predstavíme, potom zavedieme a na záver poskytneme riešenia jednotlivých diferenciálnych rovníc. Veľký dôraz bude kladený na existenciu rovnovážnych riešení a ich kvalitatívne vlastnosti. Pre vlastné návrhy riešenia v poslednej kapitole sme vybrali jeden z modelov, a to Walrasov model cenového prispôsobenia, a poskytni detailnejšiu analýzu vlastností riešenia pre rôzne druhy funkcií dopytu a ponuky.

## CIELE PRÁCE, METÓDY A POSTUPY SPRACOVANIA

Hlavným cieľom tejto práce je zoznámiť čitateľa s autonómnymi diferenciálnymi rovnicami a ich využitím v ekonomických modeloch. To je demonštrované na štyroch konkrétnych modeloch, ktoré sú zostavené a rozanalyzované. Pri jednotlivých riešeniach je dôraz kladený na existenciu periodických riešení a stabilitu stacionárnych bodov. Snahou je modely nie len popísať, ale aj vysvetliť na konkrétnych príkladoch.

Pre spracovanie problematiky autonómných diferenciálnych rovníc a ich aplikácii v ekonómii bolo potrebné najskôr si naštudovať teoretický základ v oblasti diferenciálnych rovníc so zameraním na autonómne diferenciálne rovnice prvého rádu. Ďalším krokom boli analýzy štyroch ekonomických modelov, ktorých výsledkom bolo vždy zostavenie diferenciálnej rovnice alebo sústavy diferenciálnych rovníc pre každý model, ich analýza, riešenie a definovanie príslušných obmedzení výpočtu.

Poslednou časťou bola analýza jedného z modelov, Walrasovho modelu cenového prispôsobenia, s rôznymi druhmi funkcií dopytu pri konštantnej funkcii ponuky. Opäť boli zostavené príslušné diferenciálne rovnice, nájdené riešenia a tieto boli interpretované v ekonomických súvislostiach.

# 1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE

V tejto časti zadefinujeme základné pojmy, ktoré budeme ďalej v práci používať. Začneme vymedzením pojmov z oblasti diferenciálnych rovníc, predovšetkým obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu a ich sústav. Zameriame sa na riešenia diferenciálnych rovníc a počiatočných úloh, veľký dôraz bude kladený aj na stacionárne body a ich klasifikáciu. Pre lepšie pochopenie problematiky pridáme niekoľko vysvetľujúcich príkladov.

## 1.1 Základné pojmy

Diferenciálnou rovnicou rozumieme rovnicu, ktorá obsahuje neznámu funkciu a jej derivácie. Takéto rovnice sa veľmi často objavujú, či už v matematike alebo v ďalších vedách. Vyskytujú sa vždy, keď sa snažíme popísať vzťahy medzi zmenami určitých veličín, stavom, v ktorom sa tieto veličiny nachádzajú, časom a prípadne aj ich umiestnením v priestore. Ak je hľadaná funkcia navyše funkciou jednej premennej, diferenciálnu rovnicu nazývame obyčajnou. [1]

**Definícia 1.1** Nech  $G$  je podmnožina euklidovského priestoru  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $f$  funkcia definovaná v  $G$ . Rovnicu v tvare

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.1)$$

nazývame *obyčajnou diferenciálnou rovnicou*.

**Definícia 1.2** Rád diferenciálnej rovnice je daný rádom najvyššej derivácie, ktorá je v rovnici obsiahnutá. [1]

**Príklad 1.3** Rovnica  $y^{(4)}(t) = y'''(t) + t^2 y'(t) + \sin(t)$  je obyčajná diferenciálna rovnica štvrtého rádu.

**Poznámka:** Ďalej budeme pod pojmom diferenciálna rovnica rozumieť obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu.

Keďže derivácia funkcie v každom bode udáva smernicu dotyčnice ku grafu funkcie v tomto bode, rovnicu (1.1) môžeme chápať ako predpis, ktorý každému bodu priradí smernicu dotyčnice prechádzajúcej týmto bodom. Oblasť  $G \subset \mathbb{R}$ , ktorej každý bod má uvedeným spôsobom priradenú smernicu, sa nazýva *smerné pole*.

**Definícia 1.4** *Riešenie diferenciálnej rovnice* je každá funkcia  $y(t)$  definovaná na intervale  $I = (a, b)$ , ktorá zároveň spĺňa: [2]

- $y(t) \in C^1(I)$ ,
- $f(t, y(t))$  je definovaná pre  $\forall t \in I$ ,
- $y'(t) = f(t, y(t))$  pre  $\forall t \in I$ .

Riešenie sa často nedá vyjadriť v explicitnom tvare, no je možné nájsť riešenie dané implicitne  $F(t, y(t)) = 0$ .

**Definícia 1.5** *Všeobecným riešením* rovnice (1.1) budeme rozumieť funkciu s jedným parametrom  $c$  takú, že špeciálnou voľbou  $c$  môžeme získať riešenie každej počiatkovej úlohy (1.2). [2]

**Príklad 1.6** Rovnica  $y'(t) = 5y(t)$  má na intervale  $I = (0, 2)$  všeobecné riešenie  $y(t) = ce^{5t}$ , kde  $c$  je akákoľvek reálna konštanta.

Niekedy môžeme mať okrem diferenciálnej rovnice aj informácie o stave systému  $y_0$  v bode  $t_0$ . Potom hľadáme riešenie, ktoré bude okrem diferenciálnej rovnice spĺňať aj podmienku na tento stav.

**Definícia 1.7** Nech oblasť  $G$  je podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , bod  $(t_0, y_0) \in G$  a  $f(t, y(t))$  je funkcia definovaná v oblasti  $G$ . Potom

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

nazývame *počiatková úloha* (*počiatkový problém*, *Cauchyova úloha*). Graf riešenia počiatkovej úlohy sa nazýva *integrálna krivka*.

Riešenie diferenciálnej rovnice či počiatkovej úlohy nemusí vždy existovať. Niekedy riešenie existuje iba na časti uvažovaného intervalu, niekedy neexistuje vôbec a niekedy riešenie existuje viacej. Nasledujúce dve vety uvádzajú podmienky, ktoré zaručujú existenciu a jednoznačnosť riešenia v okolí bodu  $(t_0, y_0)$ .

**Veta 1.8 (Peanova)** Nech funkcia  $f(t, y(t))$  je definovaná a spojitá v dvojrozmernej uzavrenej oblasti  $\bar{R}$  :

$$\bar{R} = \{(t, y) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}. \quad (1.3)$$

Potom existuje aspoň jedno riešenie počiatkovej úlohy (1.2), ktoré je definované a spojité na intervale  $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ , kde  $\delta$  je daná vzťahom [2]

$$\delta = \min(a, \frac{b}{m}), \quad m = \max_{\bar{R}} |f(t, y(t))|. \quad (1.4)$$

**Veta 1.9 (Picardova)** Nech funkcia  $f(t, y(t))$  spĺňa tieto dva predpoklady

- funkcia  $f(t, y(t))$  je definovaná a spojitá v dvojrozmernej uzavrenej oblasti  $\bar{R}$  danej (1.3),

- funkcia má v každom bode uzavrenej oblasti  $\bar{R}$  parciálnu deriváciu  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , ktorá je ohraničená v  $\bar{R}$ , teda platí

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right| \leq c, \quad \forall (t, y) \in \bar{R},$$

kde  $c$  je kladná konštanta.

Potom existuje práve jedno riešenie počiatkovej úlohy (1.2), ktoré je definované na intervale  $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ , kde  $\delta$  je daná (1.4). [2]

Podmienku na ohraničenosť parciálnej derivácie môžeme nahradiť slabšou podmienkou na lipschitzovskosť  $f(t, y(t))$  v premennej  $y$ , teda že existuje konštanta  $L > 0$  taká, že pre ľubovoľné dva body  $(t, y_1), (t, y_2) \in G$  platí

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|. \quad (1.5)$$

**Príklad 1.10** Uvažujme počiatkovú úlohu  $y' = y^{\frac{2}{3}}, y(t_0) = y_0$  a jej riešenie v uzavretej oblasti  $\bar{R}$  so stredom v bode  $(0, 0)$ . Funkcia  $f(t, y(t))$  je spojitá v každej takejto oblasti, preto počiatková úloha bude mať aspoň jedno riešenie pre  $\forall (t_0, y_0) \in \bar{R}$ . Derivácia  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$  nie je ohraničená v bodoch  $(t, 0)$ , takže jednoznačnosť riešenia zaručená nebude.

## 1.2 Vybrané typy diferenciálnych rovníc

Prvým typom diferenciálnej rovnice, ktorú budeme ďalej v našich modeloch využívať, je rovnica so separovanými premennými.

**Definícia 1.11** Diferenciálnu rovnicu  $y'(t) = f(t, y)$ , kde funkcia  $f$  sa dá rozložiť na súčin dvoch funkcií jednej premennej  $g(t)$  a  $h(y)$

$$y'(t) = g(t)h(y), \quad (1.6)$$

nazývame *diferenciálna rovnica so separovanými premennými*. [3]

Nech funkcie  $g(t)$  a  $h(y)$  sú definované a spojité na nejakých intervaloch  $I_1$  resp.  $I_2$ . Za predpokladu  $h(y) \neq 0$  na celom intervale  $I_2$ , riešenie dané implicitne získame vydelením obidvoch strán rovnice (1.6) výrazom  $h(y)$  a následnou integráciou podľa  $t$

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dt} dt = \int g(t) dt,$$

čiže

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt. \quad (1.7)$$

**Príklad 1.12** Diferenciálna rovnica  $y'(t) = -\frac{\sin(t)}{y^2+1}$  je rovnica so separovanými premennými, ktorej implicitné riešenie na intervale  $t \in (-\infty, \infty)$  je

$$\frac{1}{3}y^3 + y = \cos(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zvláštnym prípadom rovníc so separovanými premennými sú autonómne diferenciálne rovnice, ktoré neobsahujú nezávislú premennú. Ak rozmyšľáme nad nezávislou premennou  $t$  ako nad časom a nad  $y(t)$  ako nad stavom systému, veľkosť zmeny  $y'(t)$  nezávisí od času, ale iba od stavu systému. Toto je veľmi častá vlastnosť mnohých systémov a veličín, preto majú autonómne diferenciálne rovnice široké využitie.

**Definícia 1.13** Diferenciálnu rovnicu v tvare

$$y'(t) = h(y), \quad (1.8)$$

kde  $h$  je definované na  $G \subset \mathbb{R}$ , nazývame *autonómna diferenciálna rovnica*. Množina  $G$  sa potom nazýva *fázový priestor*.

Riešenie  $y = \theta(t)$  počiatovej úlohy tvorenej rovnicou (1.8) a počiatkovou podmienkou  $y(t_0) = y_0$  môžeme interpretovať ako graf v priestore  $\mathbb{R} \times G$ , alebo ako krivku v množine  $G$  danú parametricky  $y = \theta(t)$ . V druhom prípade sa krivka nazýva *trajektóriou riešenia*  $y$  a je to kolmý priemet grafu  $y = \theta(t)$  z  $\mathbb{R} \times G$  do fázového priestoru  $G$ . Geometrická reprezentácia trajektórií rovnice (1.8) sa nazýva *fázový portrét*. [4]

Budeme predpokladať, že funkcia  $h(y)$  je spojitá a spĺňa Lipschitzovu podmienku (1.5) v každom bode  $G$ . Potom riešenie diferenciálnej rovnice (1.8) s počiatočnou podmienkou  $y(t_0) = y_0$  existuje a je jednoznačné. Preto sú trajektórie riešení buď to disjunktné, alebo totožné. [5]

**Príklad 1.14** Zoberme si počiatočnú úlohu  $y'(t) = (1 + y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Funkcia  $h(y) = (1 + y)$  je spojitá a lipschitzovská pre  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Preto bude existovať riešenie počiatočnej úlohy a bude jednoznačné. Riešenie diferenciálnej rovnice je podľa (1.7) dané:

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int 1 dt, \text{ pre } y \neq -1.$$

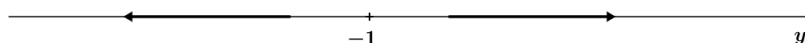
Po úprave obidvoch strán pri predpoklade  $y \neq -1$  dostaneme všeobecné riešenie

$$y(t) = ce^t - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Riešenie počiatočnej úlohy potom bude

$$y(t) = \frac{y_0 + 1}{e^{t_0}} e^t - 1$$

Fázový portrét je zobrazený na Obr. 1.



Obr. 1: Fázový portrét rovnice  $y'(t) = (1 + y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  (Zdroj: vlastný)

Všimnime si teraz situáciu  $y = -1$ . Dostávame  $y' = 0$ , čiže ak  $y_0 = -1$ , hodnota  $y$  sa v čase nebude meniť, ale ostane konštantná. Na tomto príklade vidíme, že pre autonómne diferenciálne rovnice môžu existovať špeciálne hodnoty  $y^*$ , pre ktoré je riešenie konštantné.

### 1.3 Stacionárne body diferenciálnej rovnice

**Definícia 1.15** Bod  $y_0$  sa nazýva *stacionárny (singulárny, kritický) bod* autonómnej diferenciálnej rovnice, ak  $h(y_0) = 0$ . Riešenie  $y(t) = y_0$  sa potom nazýva *rovnovážne (singulárne) riešenie*.



Korene rovnice  $h(y) = 0$  predstavujú singulárne trajektórie. Otvorené intervaly, na ktorých je  $h(y)$  kladná, tvoria trajektórie rastúcich riešení a naopak, otvorené intervaly, pre ktoré platí  $h(y) < 0$ , tvoria trajektórie klesajúcich riešení.

**Definícia 1.16** Stacionárny bod  $y^*$  rovnice (1.8) nazývame *stabilný*, ak pre  $\forall \epsilon > 0$  a  $\forall t_1 \in \mathbb{R}$  existuje  $\delta$  tak, že každé riešenie  $y_0(t)$  rovnice (1.8) vyhovujúce podmienke  $|y^* - y_0(t_1)| < \delta$  existuje pre  $t \geq t_1$  a splňuje pre tieto  $t$  nerovnosť  $|y^* - y_0(t)| < \epsilon$ . [6]

**Definícia 1.17** Stacionárny bod nazývame *asymptoticky stabilný*, ak je stabilný a pre  $\forall t_1 \in \mathbb{R}$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pre každé riešenie  $y_0(t)$  rovnice (1.8) spĺňajúce nerovnosť  $|y^* - y_0(t_1)| < \delta$  platí [6]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y^* - y_0(t)| = 0.$$

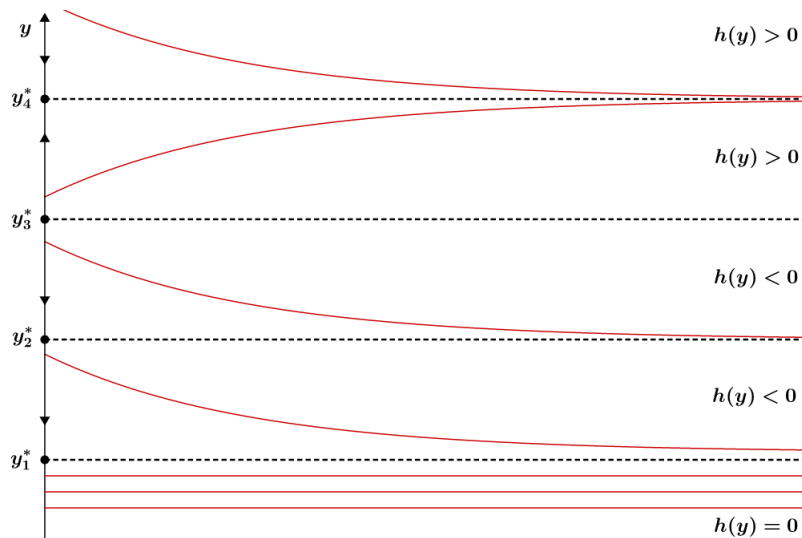
Stacionárny bod ktorý nie je stabilný sa nazýva *nestabilný*. Zvláštnym typom nestabilného stacionárneho bodu je *semistabilný* bod, ktorý má tú vlastnosť, že riešenia s počiatočným bodom  $y_0(t_1) > y^*$  spĺňajú podmienky stability a riešenia s počiatočným bodom  $y_0(t_1) < y^*$  podmienky stability nespĺňajú, alebo naopak.

Pre určenie typu stacionárneho bodu usporiadame stacionárne body našej rovnice od najmenšieho po najväčší  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ . Aby sme určili stabilitu bodu  $y_i^*$  potrebujeme zistiť, či sú trajektórie riešenia  $y(t)$  rastúce alebo klesajúce na intervaloch v okolí tohto bodu. Interval  $(y_{i-1}^*, y_i^*)$  (prípadne  $(-\infty, y_1^*)$  pre najmenší zo stacionárnych bodov) označíme  $I_i^-$  a interval  $(y_i^*, y_{i+1}^*)$  (prípadne  $(y_n^*, \infty)$  pre najväčší zo stacionárnych bodov) označíme  $I_i^+$ . Určíme, či je funkcia  $h(y)$  na týchto intervaloch kladná alebo záporná, a teda či  $y(t)$  rastie alebo klesá. [7]

Stacionárny bod  $y_i^*$  je

- stabilný ak funkcia  $h(y)$  je nezáporná na  $I_i^-$  a nekladná na  $I_i^+$ ,
- asymptoticky stabilný ak je funkcia  $h(y)$  kladná na  $I_i^-$  a záporná na  $I_i^+$ ,
- nestabilný ak je funkcia  $h(y)$  záporná na  $I_i^-$  alebo kladná na  $I_i^+$ ,
- semistabilný ak je  $h(y)$  buď záporná na  $I_i^-$  alebo kladná na  $I_i^+$  (ale nie obidvoje súčasne).

Grafická ilustrácia klasifikácie stacionárnych bodov je zobrazená na Obr. 2. Stacionárny bod  $y_1^*$  je stabilný,  $y_2^*$  semistabilný,  $y_3^*$  nestabilný a  $y_4^*$  je asymptoticky stabilný.



Obr. 2: Klasifikácia stacionárnych bodov (Zdroj: vlastný)

**Príklad 1.18** Autonómna diferenciálna rovnica  $y'(t) = y(y - 2)(y + 1)^2$  má 3 stacionárne body:

$$y_1^* = -1, y_2^* = 0, y_3^* = 2.$$

Funkcia  $h(y)$  je záporná na intervale  $(0, 2)$  a kladná na všetkých ostatných intervaloch. Čiže  $y_1^*$  je semistabilný,  $y_2^*$  je asymptoticky stabilný a  $y_3^*$  je nestabilný stacionárny bod.

## 1.4 Autonómne systémy

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať sústavami diferenciálnych rovníc. Keďže v práci budeme ďalej využívať iba sústavu 2 autonómnych diferenciálnych rovníc prvého rádu, obmedzíme sa iba na tento prípad.

**Definícia 1.19** Sústavu 2 diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y, z), \\ z'(t) &= g(y, z), \end{aligned} \tag{1.9}$$

kde funkcie  $g$  a  $f$  sú definované v  $G \subset \mathbb{R}^2$ , nazývame *autonómny systém*.

**Definícia 1.20** Každú dvojicu funkcií  $y(t)$ ,  $z(t)$ , ktoré majú spojité derivácie v nejakom intervale  $I$  a vyhovujú systému (1.9) pre  $\forall t \in I$ , nazývame *riešenie systému*. [8]

**Definícia 1.21** Úlohu určiť riešenie systému

$$y'(t) = f(y, z), \quad z'(t) = g(y, z),$$

ktoré zároveň spĺňa počiatočné podmienky

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad (1.10)$$

nazývame *počiatočná úloha*.

**Príklad 1.22** Počiatočná úloha

$$y'(t) = z, \quad y(0) = 0,$$

$$z'(t) = -y, \quad z(0) = 2,$$

má riešenie

$$y(t) = 2 \sin(t), \quad z(t) = 2 \cos(t).$$

Riešenie  $y(t) = \theta_1(t)$ ,  $z(t) = \theta_2(t)$  počiatočnej úlohy (1.10) môžeme opäť interpretovať ako graf funkcie v priestore  $G \times \mathbb{R}$  alebo ako krivku v priestore  $G$  danú parametricky. V druhom prípade sa táto krivka nazýva *trajektória systému* a je to kolmý priemet grafu funkcie  $y(t) = \theta_1(t)$ ,  $z(t) = \theta_2(t)$  z  $G \times \mathbb{R}$  do  $G$ .

Počiatočná úloha (1.10) nemusí byť vždy riešiteľná, prípadne riešení môže mať viacej. Teraz si uvedieme postačujúce podmienky aby riešenie existovalo a bolo jednoznačné.

**Veta 1.23 (Peanova)** Nech  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ . Označíme

$$I = \langle t_0, t_0 + a \rangle, \quad \overline{R} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |(y, z) - (y_0, z_0)| \leq b\} \quad (1.11)$$

a funkciu

$$\Phi = (t, f, g), \quad \Phi : I \times \overline{R} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.12)$$

Nech funkcia  $\Phi$  je spojitá. Potom existuje aspoň jedno riešenie počiatočnej úlohy (1.10), ktoré je definované na intervale  $\langle t_0, t_0 + \delta \rangle$ , kde  $\delta$  je daná [2]

$$\delta = \min(a, bm^{-1}), \quad m = \max_{[t, y, z] \in I \times \overline{R}} |\Phi(t, y, z)|. \quad (1.13)$$

**Veta 1.24** (*Picardova - Lindelöfova*) Nech  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$  a nech sú  $I, \bar{R}$  dané vzťahom (1.11). Predpokladajme, že funkcia  $\Phi$ , daná (1.12), je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmienku vzhľadom k  $(y, z)$ : existuje  $L \in \mathbb{R}^+$  také, že

$$|\Phi(t, y_1, z_1) - \Phi(t, y_2, z_2)| \leq L|(y_1, z_1) - (y_2, z_2)|, \forall [t, y_1, z_1], [t, y_2, z_2] \in I \times \bar{R}.$$

Potom existuje práve jedno riešenie počiatočnej úlohy (1.10) na intervale  $\langle t_0, t_0 + \delta \rangle$ , kde  $\delta$  je daná vzťahom (1.13). [2]

**Príklad 1.25** Uvažujme počiatočnú úlohu

$$y'(t) = 3z^2 + y, \quad y(t_0) = y_0,$$

$$z'(t) = y(z + 4), \quad z(t_0) = z_0, .$$

Funkcia  $\Phi = (3z^2 + y, y(z + 4))$  je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmienku vzhľadom k  $(y, z)$ , teda počiatočná úloha má riešenie a toto riešenie je jednoznačné.

## 1.5 Stacionárne body autonómneho systému a ich klasifikácia

V tejto časti definujeme a následne klasifikujeme stacionárne body systému diferenciálnych rovníc. Opäť sa obmedzíme iba na prípad autonómnych systémov. Pre klasifikáciu stacionárnych bodov iných druhov systémov sa dajú použiť viaceré kritériá, napr. Routhovo–Hurwitzovo kritérium, viď [9].

**Definícia 1.26** Bod  $(y^*, z^*)$  sa nazýva *stacionárny (singulárny, kritický) bod* autonómneho systému (1.9), ak  $f(y^*, z^*) = g(y^*, z^*) = 0$ . [10]

**Príklad 1.27** Autonómny systém

$$y'(t) = z(y + c),$$

$$z'(t) = y(z + d),$$

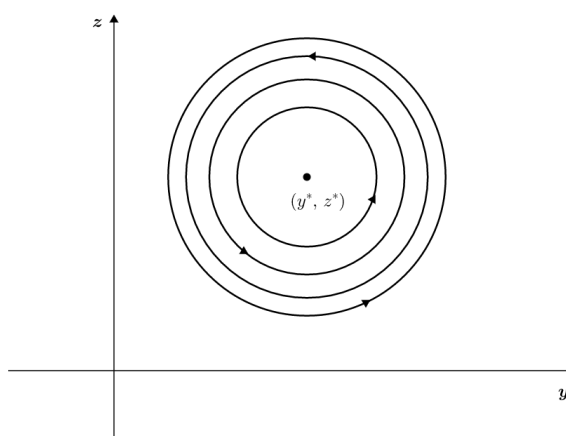
$c, d \in \mathbb{R}$  má stacionárne body  $(0, 0)$  a  $(-c, -d)$ .

**Veta 1.28** Uvažujem systém (1.9). Nech  $f$  a  $g$  sú spojité funkcie, ktoré spĺňajú Lipschitzovu podmienku. Potom riešenie  $y(t), z(t)$  existuje a je jednoznačné, a teda môže mať trajektórie troch typov: [5]

1. singulárne body,
2. cykly (odpovedajúce nekonštantnému periodickému riešeniu),
3. trajektórie, ktoré samy seba nepretínajú.

**Definícia 1.29** Stacionárny bod  $(y^*, z^*)$  systému (1.9) sa nazýva [11]

- *bod rotácie*, ak v jeho ľubovoľnom okolí existuje aspoň jeden cyklus obsahujúci tento bod vo svojom vnútri; ak existuje jeho rýdže okolie  $\mathcal{U}$  také, že každá trajektória s  $(y(0), z(0)) \in \mathcal{U}$  je cyklom obsahujúcim bod  $(y^*, z^*)$  vo svojom vnútri tento bod nazývame *stred*



Obr. 3: Stacionárny bod typu stred (Zdroj: vlastný)

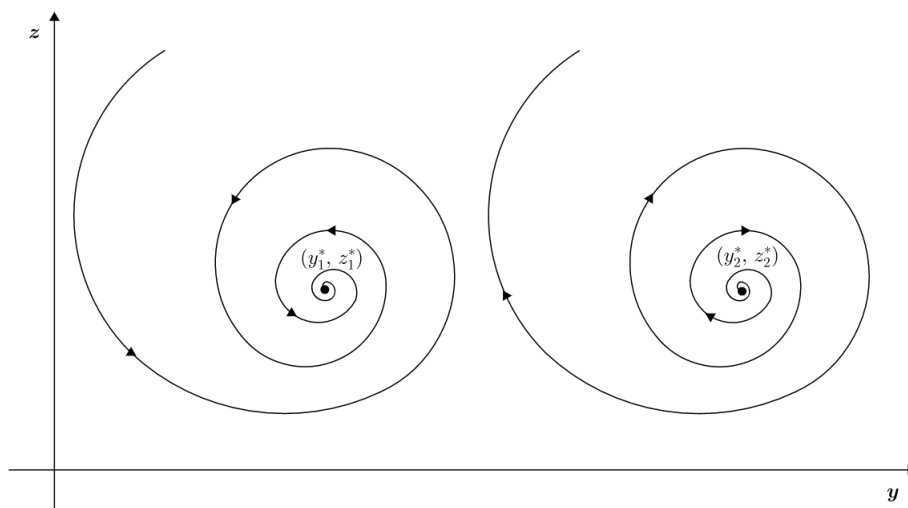
- *ohnisko*, keď existuje rýdže okolie  $\mathcal{U}$  také, že pre každú trajektóriu s  $(y(0), z(0)) \in \mathcal{U}$  platí

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*) \text{ alebo } \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*),$$

a pre uhol  $\vartheta$ , ktorý zvierá vektor  $(y(t), z(t)) - (y^*, z^*)$  s nejakým pevne stanoveným vektorom, platí

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vartheta(t) = \pm\infty \text{ alebo } \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = \pm\infty.$$

Čiže trajektórie sa ku stacionárnemu bodu približujú (resp. sa od neho vzdľaľujú) po špirále; podľa toho, či sa riešenia v čase ku stacionárnemu bodu približujú alebo sa od neho vzdľaľujú, rozlišujeme príťažlivé ( $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*)$ ) a odpudivé ( $\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*)$ ) ohnisko



Obr. 4: Stacionárny bod typu príťažlivé (vľavo) a odpudivé (vpravo) ohnisko (Zdroj: vlastný)

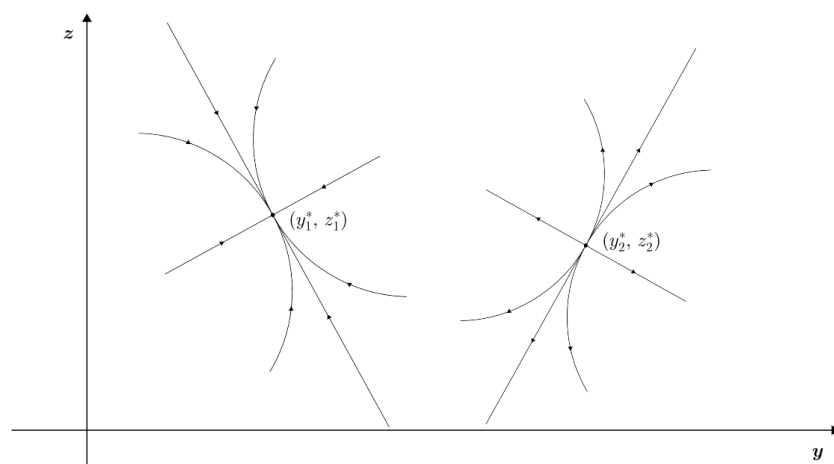
- *uzol* v prípade, že pre každú trajektóriu s  $(y(0), z(0)) \in \mathcal{U}$  platí

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*) \text{ alebo } \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*),$$

ale pre uhol  $\vartheta$  existuje vlastná limita

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vartheta(t) = a \text{ alebo } \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = a,$$

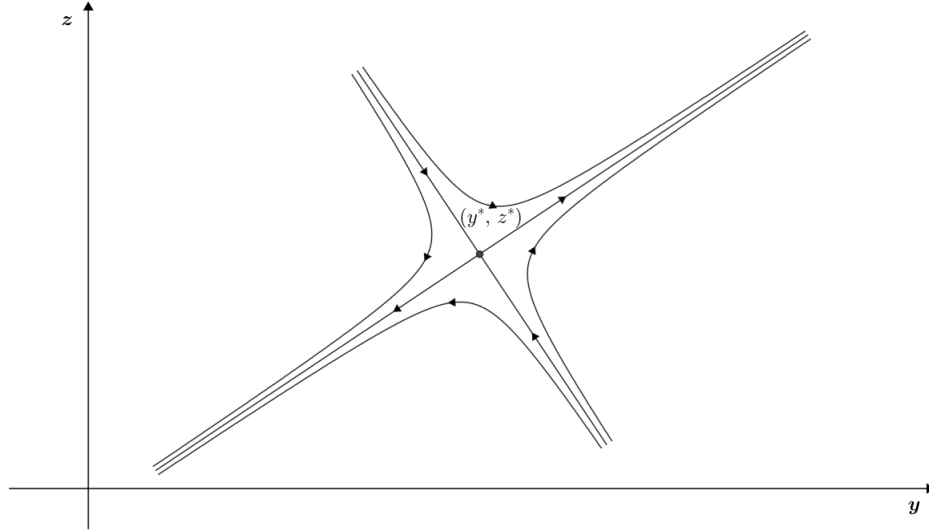
$a \in \mathbb{R}$ ; podľa toho, či sa riešenia v čase približujú ku stacionárnemu bodu alebo sa od neho vzdľahujú, rozlišujeme príťažlivý ( $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*)$ ) a odpudivý ( $\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*)$ ) uzol



Obr. 5: Stacionárny bod typu príťažlivý (vľavo) a odpudivý (vpravo) uzol (Zdroj: vlastný)

- *sedlo*, ak existuje iba konečný počet trajektórií takých, že

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*) \text{ alebo } \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (y^*, z^*).$$



Obr. 6: Stacionárny bod typu sedlo (Zdroj: vlastný)

Označíme Jacobiho maticu systému (1.9)

$$J(y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) & \frac{\partial f}{\partial z}(y, z) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) & \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) \end{pmatrix},$$

determinant tejto matice  $\mathcal{D}(y, z) = \det J(y, z)$  a jej stopu  $\tau(y, z) = \text{tr} J(y, z)$ . Predpokladajme, že funkcie  $f$  a  $g$  sú spojité a majú spojité derivácie v okolí bodu  $(y^*, z^*)$ ,  $f(y^*, z^*) = g(y^*, z^*) = 0$  a nech  $\mathcal{D}(y^*, z^*) \neq 0$ . Potom je bod  $(y^*, z^*)$  stacionárnym bodom systému (1.9) a jeho typ môžeme určiť podľa nasledujúcej tabuľky. [2]

Tab. 1: Typ stacionárneho bodu  $(y^*, z^*)$  podľa  $\mathcal{D}$  a  $\tau$  (Zdroj: vlastný)

$\mathcal{D}(y^*, z^*)$	$\tau^2(y^*, z^*) - 4\mathcal{D}(y^*, z^*)$	$\tau(y^*, z^*)$	Typ stacionárneho bodu
záporný			sedlo
kladný	kladné		uzol
kladný	záporné	nenulová	ohnisko
kladný	záporné	nulová	bod rotácie alebo ohnisko

## 2 ANALÝZA SÚČASNÉHO STAVU

V tejto kapitole postupne uvedieme niekoľko ekonomických modelov, ktoré vývoj určitej ekonomickej veličiny v čase popisujú pomocou autonómnych diferenciálnych rovníc. Ekonomický model je zjednodušený popis ekonomickej reality. Modely sú zostavené tak, aby na základe predpokladov popísali ekonomické správanie určitých subjektov. Keďže neexistuje žiadne objektívne meranie ekonomických výstupov, všetky ekonomické modely sú subjektívne. Každý ekonóm do svojho modelu zahrnie predpoklady a premenné, ktoré on sám považuje za dôležité, a teda popisuje ekonomickú realitu zo svojho vlastného subjektívneho pohľadu. [12]

Ekonomické modely sú vo všeobecnosti reprezentované sústavou rovníc, ktoré popisujú ekonomické správanie. Cieľom je popísať situáciu čo najjednoduchšie, aby sme model vedeli nejakým spôsobom vyriešiť, ale zároveň zahrnúť dostatočné množstvo rovníc, aby popis ekonomickej reality bol čo najpresnejší. [12]

Aj napriek rozmanitosti ekonomických modelov je niekoľko základných predpokladov, na ktorých sú všetky ekonomické modely založené. Spomenieme dva z nich. Prvým je *ceteris paribus*<sup>1</sup> - za inak nezmenených podmienok. Druhým je predpoklad, že ekonomické subjekty uvažujú racionálne a snažia sa optimalizovať svoju situáciu. [13] Navyše pri všetkých modeloch v tejto kapitole budeme uvažovať uzavretú ekonomiku, teda import ani export nebudeme brať do úvahy.

V každej časti najskôr uvedieme základné informácie o danom modeli, potom model zavedieme a na záver urobíme matematickú a ekonomickú analýzu každého z modelov.

### 2.1 Walrasov model cenového prispôsobenia

Prvý model je Walrasov<sup>2</sup> model cenového prispôsobenia. Tento model popisuje ustáľovanie cien produktov a služieb v čase. Model uvažuje situáciu s tržnou ekonomikou, v ktorej trhovacia cena je výsledkom vzájomného vzťahu ponuky a dopytu.

Pre jednoduchosť budeme popisovať vývoj ceny jedného produktu alebo služby na ur-

---

<sup>1</sup>Označenie predpokladu, že tvrdenie platí iba ak všetky ostatné podmienky ostanú nezmenené

<sup>2</sup>Marie Esprit Léon Walras (1834 - 1910), francúzsky matematik a ekonóm, známy ako tvorca teórie všeobecnej ekonomickej rovnováhy



čítom časovom intervale, teda budeme uvažovať izolovaný trh nami vybranej komodity, pre ktorý platí, že ponuka aj dopyt sú ovplyvňované iba cenou nami zvoleného produktu. Nebudeme brať do úvahy vývoj cien ostatných komodít.

Pri popisovaní uštalovania ceny v čase  $p(t)$  budeme používať agregátny dopyt<sup>3</sup>  $D(p)$  a agregátnu ponuku<sup>4</sup>  $S(p)$ , obidvoje ako funkcie ceny.

Keďže nemôže existovať záporná ponuka, záporný dopyt alebo záporná cena, všetky tieto veličiny budeme uvažovať nezáporné. Taktiež čas budeme uvažovať iba nezáporný.

### 2.1.1 Zavedenie modelu

Walrasov model cenového prispôsobenia je založený na nasledujúcich predpokladoch:

**(WA1)** Platí zákon rastúcej ponuky - s rastúcou cenou produktu lineárne rastie aj počet podnikateľských subjektov, ktoré sú za túto cenu ochotné produkt vyrobiť a predáť:

$$S(p) = \mu + \phi p, \quad (2.14)$$

kde  $\phi > 0$  a  $\mu > 0$ . Konštanta  $\mu$  predstavuje ponuku pri nulovej cene a konštanta  $\phi$  udáva sklon krivky ponuky. [14]

**(WA2)** Platí zákon klesajúceho dopytu - s rastúcou cenou produktu lineárne klesá aj počet kupujúcich, ktorí sú za túto cenu ochotní produkt kúpiť:

$$D(p) = \nu + \psi p, \quad (2.15)$$

kde  $\nu \geq 0$ ,  $\psi < 0$  a  $p \in \langle 0, -\frac{\nu}{\psi} \rangle$ . Svoje ďalšie úvahy obmedzíme iba na hodnoty  $p$  patriace tomuto intervalu. Konštanta  $\nu$  predstavuje maximálny dopyt, teda dopyt pri nulovej cene a konštanta  $\psi$  udáva sklon krivky dopytu. [14]

---

<sup>3</sup>Agregátny dopyt, alebo skrátene iba dopyt, vyjadruje celkové množstvo tovarov a služieb, ktoré sú spotrebitelia v ekonomike ochotní nakúpiť za určité časové obdobie za danú cenu

<sup>4</sup>Agregátna ponuka, alebo skrátene iba ponuka, vyjadruje celkové množstvo tovarov a služieb, ktoré sú podnikateľské subjekty v ekonomike ochotné vyrobiť za určité časové obdobie za danú cenu

**(WA3)** Cenu v tržnej ekonomike určuje tržný mechanizmus. Tá sa nakoniec ustáli na rovnovážnej cene  $p^*$ , pre ktorú platí

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Toto uštalovanie je podľa Walrasovho modelu postupný proces. Označme prebytok dopytu  $E(p)$

$$E(p) = D(p) - S(p).$$

Toto je veličina závislá na cene. Môže byť kladná, nulová aj záporná.

Uvažujme počiatočnú situáciu s cenou  $p_0$ . Ak je táto cena vyššia, ako rovnovážna cena, tj.  $p_0 > p^*$ , väčšie množstvo podnikateľských subjektov je ochotných produkt predáť ako je množstvo kupujúcich ochotných produkt kúpiť. Vznikne prebytok ponuky nad dopytom, čiže  $E(p) < 0$ . Reakciou na tento stav, prebytok ponuky, bude pokles ceny na cenu  $p_1$ .

Keď sa nová cena dostane pod úroveň rovnovážnej ceny, teda  $p_1 < p^*$ , výsledkom bude viac kupujúcich, ale menej producentov, ako by bolo pri rovnovážnej cene. Vznikne prebytok dopytu nad ponukou  $E(p) > 0$ . Cena  $p_1$  následne stúpne. A takto sa cena postupne mení ďalej. [4]

Vidíme, že zmena ceny  $p(t)$  závisí iba od znamienka  $E(p)$ . Predpokladajme, že táto závislosť je lineárna. Za predpokladu, že veličina  $p(t)$  je diferencovateľná a čas plynie spojito môžeme napísať

$$p' = \gamma E(p), \tag{2.16}$$

kde  $\gamma$  je koeficient cenového prispôsobenia sa. Je to kladná konštanta, ktorá nám hovorí, ako rýchlo reaguje cena na nerovnováhu medzi dopytom a ponukou. Využitím výrazov (2.14) a (2.15) dostávame diferenciálnu rovnicu:

$$p' = \gamma((\nu - \mu) + (\psi - \phi)p). \tag{2.17}$$

Keď budeme uvažovať aj počiatočnú cenu  $p_0$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}_0^+$  v čase  $t = 0$ , dostaneme počiatočnú úlohu

$$p' = \gamma((\nu - \mu) + (\psi - \phi)p), \quad p(0) = p_0. \tag{2.18}$$

### 2.1.2 Matematická analýza riešenia modelu

Rovnica (2.17) je autonómna diferenciálna rovnica. Aby existoval stacionárny bod tejto rovnice, musí byť splnené  $\nu - \mu \geq 0$ , teda pri nulovej cene musí byť aspoň taký veľký dopyt, ako je ponuka. Budeme uvažovať situáciu  $\nu - \mu > 0$ . V tom prípade bude existovať jeden stacionárny bod

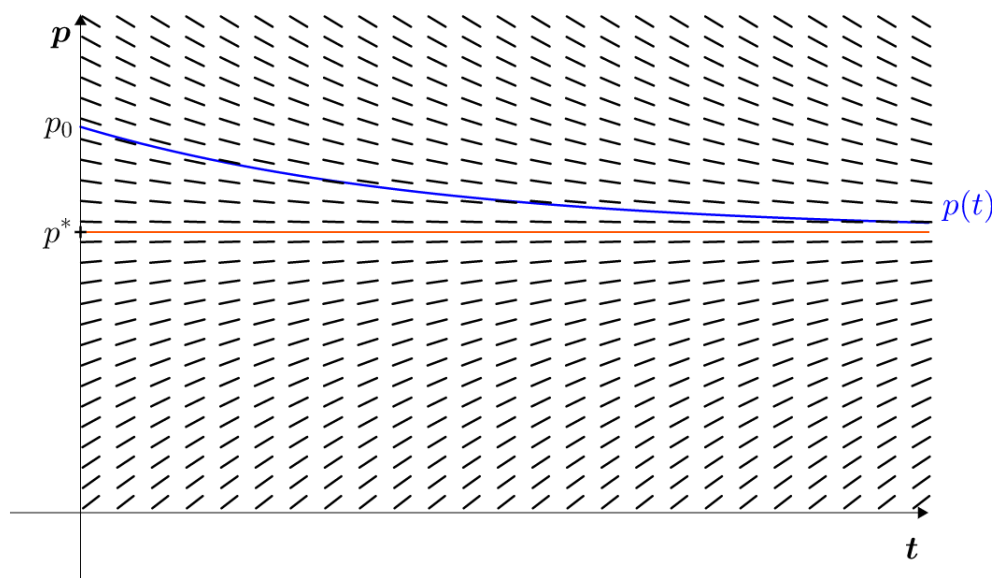
$$p^* = -\frac{(\nu - \mu)}{(\psi - \phi)}. \quad (2.19)$$

Stabilita stacionárneho bodu  $p^*$  bude závisieť od konštanty  $\gamma(\psi - \phi)$ . V našom prípade je  $\gamma > 0$  a  $(\psi - \phi) < 0$ , čiže výraz  $\gamma(\psi - \phi)$  je záporný. Tento stacionárny bod je asymptoticky stabilný. Riešenie diferenciálnej rovnice (2.17) je v tvare

$$p(t) = c e^{\gamma(\psi - \phi)t} - \frac{(\nu - \mu)}{(\psi - \phi)},$$

kde  $c$  je reálna konštanta, pre ktorú je  $p(t)$  nezáporné na celom uvažovanom časovom intervale. Riešenie počiatkovej úlohy (2.18) potom bude

$$p(t) = \left( p_0 + \frac{\nu - \mu}{\psi - \phi} \right) e^{\gamma(\psi - \phi)t} - \frac{(\nu - \mu)}{(\psi - \phi)}.$$



Obr. 7: Riešenie počiatkovej úlohy (2.18) pre  $p_0 > p^*$  (Zdroj: vlastný)

### 2.1.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu

Stacionárny bod  $p^*$ , daný vzťahom (2.19), je asymptoticky stabilný a vyjadruje rovnovážnu cenu. To znamená, že cena bude s rastúcim časom postupne vďaka vzájomnému pôsobeniu ponuky a dopytu konvergovať k tejto hodnote.

**Príklad 2.30** Uvažujme produkt, ktorého agregátna ponuka a agregátny dopyt sú dané funkciami  $S(p) = 5 + 4p$ ,  $D(p) = 30 - p$ . Predpokladajme, že koeficient prispôsobenia sa  $\gamma = 0,1$  a počiatočná cena je  $p_0 = 10$ . V tomto prípade hodnota ceny postupne konverguje ku rovnovážnej hodnote  $p^* = 5$  a riešenie počiatočnej úlohy vyzerá nasledovne:

$$p = 5e^{-0,5t} + 5.$$

## 2.2 Harrodov-Domarov model ekonomického rastu

Harrodov<sup>5</sup>-Domarov<sup>6</sup> model je založený na keynesiánskom<sup>7</sup> modeli úspor a investícií. Model popisuje základnú podmienku pre dlhodobu udržateľný rast ekonomiky a poukazuje na dvojitý význam investovania úspor za účelom vytvorenia nového kapitálu pre ekonomický rast - nový kapitál môže generovať ďalšie zisky a zároveň tvorbou nového kapitálu sa zvyšuje produkčná kapacita.

Pomocou tohto modelu popíšeme jednu zo základných ekonomických veličín - produkciu. Produkovať môže ekonomický subjekt, ktorý vlastní kapitál. Kapitál vzniká investovaním. Preto budeme využívať tri veličiny závislé na čase - produkciu  $Q(t)$ , kapitál  $K(t)$  a investície  $I(t)$ .

Nemôžeme vyprodukovať záporné množstvo výrobkov, vlastníť záporné množstvo zdrojov alebo investovať záporné množstvo finančných prostriedkov, preto sú všetky tieto ekonomické veličiny nezáporné. Keďže nemá zmysel popisovať situáciu s nulovou produkciou, nulovým kapitálom alebo nulovými investíciami, budeme považovať všetky

---

<sup>5</sup>Roy Harrod (1900 - 1978), anglický ekonóm, známy vďaka podielu na vytvorení Harrodovho-Domarovho modelu

<sup>6</sup>Evsey Domar (1914 - 1997), rusko-americký ekonóm, známy vďaka podielu na vytvorení Harrodovho-Domarovho modelu

<sup>7</sup>Keynesianizmus je súhrnné označenie pre niektoré ekonomické názorové prúdy v 20. a 21. storočí, ktoré sa zameriavajú hlavne na to, ako agregátny dopyt ovplyvňuje produkciu

tieto veličiny za kladné.

### 2.2.1 Zavedenie modelu

Táto podkapitola je inšpirovaná [15].

Harrodov-Domarov model je založený na troch predpokladoch:

**(HD1)** Prírastok kapitálu v čase je daný investičnou činnosťou podnikateľských subjektov a opotrebovaním kapitálu vlastneného týmito subjektami:

$$K(t + \Delta t) = K(t) + I(t)\Delta t - aK(t)\Delta t,$$

kde  $\Delta t$  vyjadruje zmenu v čase a koeficient  $a$  je koeficient amortizácie. Tento koeficient vyjadruje podiel z kapitálu, ktorý sa za daný čas znehodnotí opotrebovaním (amortizáciou), teda  $a \in \langle 0, 1 \rangle$ . Ak  $\Delta t \neq 0$ , úpravou tejto rovnice dostaneme

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = I(t) - aK(t).$$

Za predpokladu, že veličina  $K$  je diferencovateľná a čas plyní spojitou, limitným prechodom  $\Delta t \rightarrow 0$  obdržíme diferenciálnu rovnicu

$$K' = I - aK. \quad (2.20)$$

**(HD2)** Úspory sa dajú vyjadriť ako konštantný podiel produkcie a všetky úspory sa ďalej investujú

$$I = S = sQ, \quad (2.21)$$

kde  $S$  sú úspory a  $s$  je koeficient úspor. Vyjadruje časť produkcie, ktorá sa usporí a následne investuje, teda  $s \in \langle 0, 1 \rangle$ .

**(HD3)** Relatívny prírastok kapitálu sa prejavuje relatívnym prírastkom produkcie

$$\frac{K'}{K} = \frac{Q'}{Q}. \quad (2.22)$$

Túto rovnosť môžeme upraviť a rozšíriť výrazom  $\frac{Q}{Q}$

$$0 = \frac{K'}{K} - \frac{Q'}{Q} = \frac{K'Q - KQ'}{KQ} = \frac{K'Q - KQ'}{Q^2} \frac{Q}{K},$$

čiže

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{Q} \right) \frac{Q}{K}.$$

Keďže  $Q$  a  $K$  sú kladné, výraz  $\frac{d}{dt} \left( \frac{K}{Q} \right)$  sa musí rovnať 0. Z toho vyplýva, že

$$\exists r^* \in \mathbb{R}^+ \text{ také, že } \frac{K(t)}{Q(t)} = r^*,$$

alebo

$$K(t) = r^* Q(t). \quad (2.23)$$

Veličina  $r(t) = \frac{K(t)}{Q(t)}$  vyjadruje kapitálovú náročnosť jednotky produkcie a vo všeobecnosti je funkciou času. Čím je  $r(t)$  väčšie, tým viac kapitálu je potrebného na jednotku produkcie. Kapitálová náročnosť jednotky produkcie zohľadňuje viacero aspektov, napríklad kvalitu kapitálu - čím kvalitnejší kapitál, tým menšia bude kapitálová náročnosť produkcie. V prípade Harrodovho-Domarovho modelu je veličina  $r(t)$  rovná konštante  $r^*$ , ktorá sa v čase nemení.

Kombináciou rovníc (2.20) a (2.22) dostaneme

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{I - aK}{K}.$$

Nahradíme veličinu  $I$  podľa rovnice (2.21) výrazom  $sQ$  a využitím vzťahu (2.23) získame

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{sQ}{K} - a = \frac{s}{r^*} - a.$$

Keďže  $\left(\frac{s}{r^*} - a\right)$  je konštantný výraz,  $\frac{Q'}{Q}$  zostáva v čase nemenný. Vývoj produkcie v čase sa dá popísať nasledujúcou diferenciálnou rovnicou:

$$Q' - \left( \frac{s}{r^*} - a \right) Q = 0. \quad (2.24)$$

Môžeme uvažovať aj hodnotu počiatočnej produkcie  $Q_0, Q_0 \in \mathbb{R}^+$  v čase  $t = 0$ . Dostaneme tak počiatočnú úlohu

$$Q' - \left( \frac{s}{r^*} - a \right) Q = 0, \quad Q(0) = Q_0. \quad (2.25)$$

## 2.2.2 Matematická analýza riešenia modelu

Konštanta  $\frac{s}{r^*} - a$  môže byť **(1)** kladná, **(2)** nulová alebo **(3)** záporná. Od toho sa bude odvíjať existencia stacionárnych bodov rovnice (2.24) a ich vlastnosti.

**(1)** V prípade, že  $\frac{s}{r^*} - a > 0$  má rovnica (2.24) v obore reálnych čísel iba jeden stacionárny bod:

$$Q^* = 0.$$

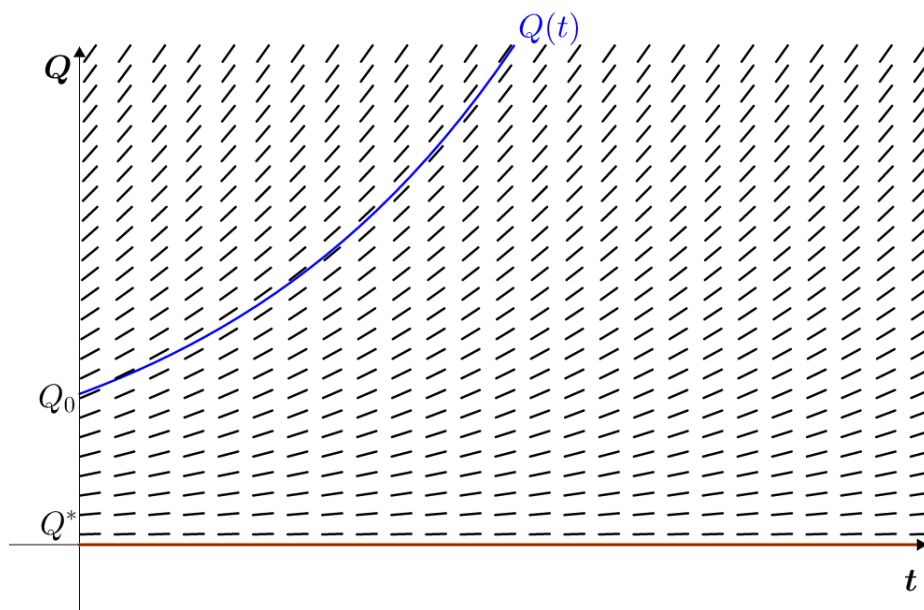
Tento stacionárny bod je nestabilný. Riešenie rovnice (2.24) má tvar

$$Q(t) = c e^{\left(\frac{s}{r^*} - a\right)t},$$

kde  $c$  je kladná reálna konštanta. Riešenie počiatkovej úlohy (2.25) je

$$Q(t) = Q_0 e^{\left(\frac{s}{r^*} - a\right)t}.$$

Toto riešenie diverguje do  $\infty$ .



Obr. 8: Riešenie počiatkovej úlohy (2.25) v prípade **(1)** (Zdroj: vlastný)

**(2)** Ak  $\frac{s}{r^*} - a = 0$ , rovnica (2.24) má nekonečne veľa stacionárnych bodov. Stacionárnym bodom je v tomto prípade akákoľvek kladná reálna konštanta

$$Q^* = c, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

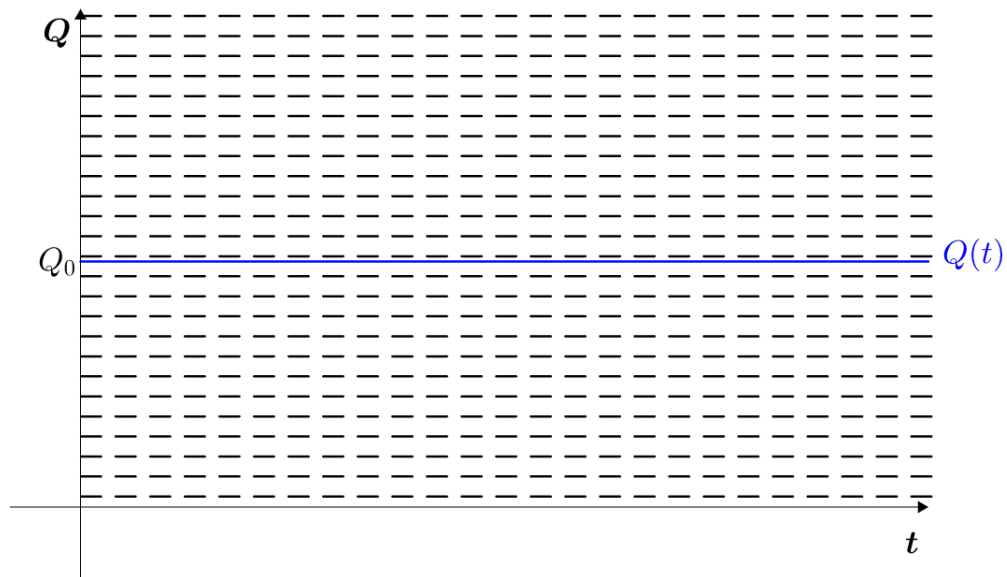
Všetky tieto stacionárne body sú stabilné. Zároveň aj riešenie diferenciálnej rovnice (2.24) je rovné konštantnej funkcii

$$Q(t) = c.$$

Riešenie počiatkovej úlohy (2.25) potom vyzerá nasledovne

$$Q(t) = Q_0.$$

V tomto prípade je riešenie konštantné a v čase  $t$  sa nemení, ostáva rovné  $Q_0$ .



Obr. 9: Riešenie počiatkovej úlohy (2.25) v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

**(3)** V prípade, že  $\left(\frac{s}{r^*} - a\right) < 0$ , má rovnica (2.24) v reálnych číslach opäť iba jeden stacionárny bod

$$Q^* = 0.$$

V tomto prípade je však stacionárny bod  $Q^*$  asymptoticky stabilný. Riešenie rovnice (2.24) je

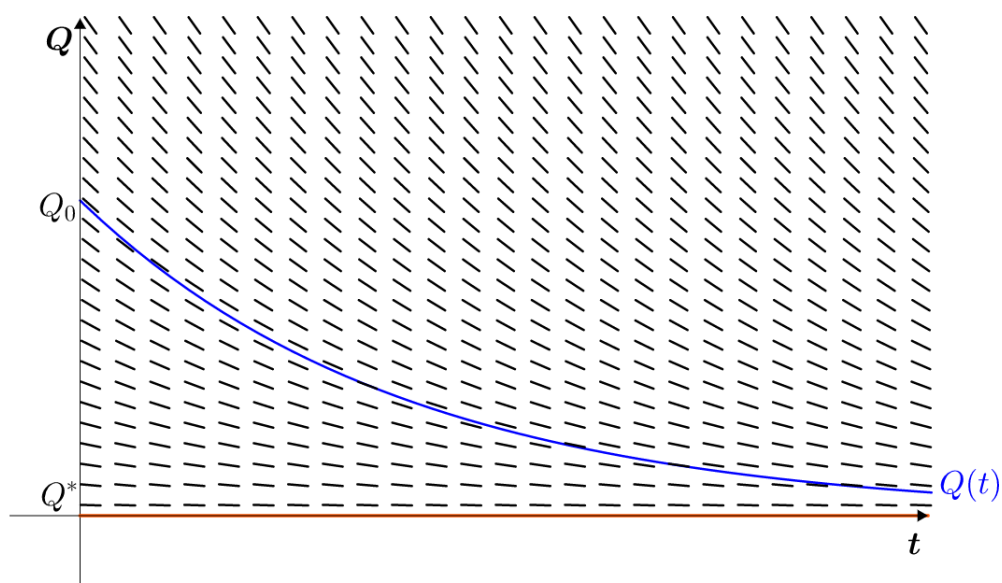
$$Q(t) = c e^{-\left(\frac{s}{r^*} - a\right)t},$$

kde  $c$  je opäť akákoľvek kladná reálna konštanta. Počiatková úloha (2.25) má riešenie

$$Q(t) = Q_0 e^{-\left(\frac{s}{r^*} - a\right)t},$$

ktoré konverguje k 0 pre akékoľvek  $Q_0 \in \mathbb{R}^+$ .





Obr. 10: Riešenie počiatkovej úlohy (2.25) v prípade (3) (Zdroj: vlastný)

### 2.2.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu

Z matematickej analýzy vyplýva, že znamienko výrazu  $\frac{s}{r^*} - a$  určuje, či produkcia rastie, stagnuje alebo klesá. Teda vývoj produkcie závisí od kapitálovej náročnosti produkcie  $r^*$ , od podielu investovaných úspor na produkcii  $s$  a od koeficientu amortizácie  $a$ .

(1) V prípade  $\frac{s}{r^*} - a > 0$ , riešenie počiatkovej úlohy (2.25) diverguje do  $\infty$ . To znamená, že produkcia rastie nad všetky mädze. Ale keďže v reálnej ekonomike sú zdroje obmedzené, produkcia sa dostane do stavu, keď dostupné zdroje už nebudú schopné pokryť kapitálové požiadavky a ekonomika sa dostane do kolapsu.

(2) Ak je  $\frac{s}{r^*} - a = 0$ , riešenie počiatkovej úlohy (2.25) je konštantné. Teda produkcia je konštantná a drží sa na úrovni  $Q_0$ . Aby došlo k nárastu produkcie, musí dôjsť ku zníženiu amortizácie alebo nárastu pomeru úspor ku kapitálovej náročnosti produkcie.

(3) Ak platí  $\frac{s}{r^*} - a < 0$ , riešenie počiatkovej úlohy (2.25) konverguje k 0, čiže produkcia klesá až sa nakoniec úplne vytratí. V tomto prípade z ekonomiky postupne vymizne všetok kapitál aj produkcia. Ekonomika speje ku krachu.

Z tohoto môžeme vyvodiť, že ak je kapitálová náročnosť produkcie príliš vysoká, produkcia nebude rásť. Rovnako nebude rásť pri vysokej amortizácii kapitálu alebo pri malej miere úspor. Pre rast produkcie by vláda mala podporovať tvorbu úspor a technologický pokrok. Zároveň musí dávať pozor, aby podnikateľské subjekty nevyužívali príliš veľa neobnoviteľných zdrojov, aby ekonomika nedospela do kolapsu.

**Príklad 2.31** Predstavme si ekonomiku, v ktorej sa usporí 20% produkcie, opotrebuje sa 30% kapitálu, na 5 jednotiek produkcie treba 4 jednotky kapitálu a počiatočný stav produkcie je 1000 jednotiek. Teda  $s = 0,2$ ,  $a = 0,3$ ,  $r^* = 0,8$  a  $Q_0 = 1000$ . V takomto prípade dostaneme  $\frac{s}{r^*} - a = -0,05$ , čiže existuje asymptoticky stabilný stacionárny bod  $Q^* = 0$ . Všeobecné riešenie našej diferenciálnej rovnice je

$$Q(t) = ce^{-0,5t},$$

kde  $c$  je kladná reálna konštanta. Množstvo produkcie bude s rastúcim časom konvergovať k nule. Riešenie počiatočnej úlohy potom je

$$Q(t) = 1000e^{-0,5t}.$$

## 2.3 Solowov-Swanov neoklasický model ekonomického rastu

Solowov<sup>8</sup>-Swanov<sup>9</sup> model je neoklasický<sup>10</sup> model dlhodobého ekonomického rastu. Jedná sa o rozšírenie Harrodovho-Domarovho modelu. V tomto modeli budeme navyš uvažovať aj o technologickom pokroku ako o jednom zo spôsobov zvýšenia produkcie.

Podobne ako Harrodov-Domarov model, Solowov-Swanov model popisuje vývoj produkcie v čase  $Q(t)$ . Taktiež používa na popísanie produkcie kapitál  $K(t)$  a úspory premenené na investície  $I(t)$ . Solowov-Swanov model pri popise produkcie uvažuje ešte jednu

<sup>8</sup>Robert Merton Solow (1924- ), americký ekonóm, známy vďaka svojej práci na teórii ekonomického rastu, držiteľ Ceny Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela (1987)

<sup>9</sup>Trevor Winchester Swan (1918–1989), austrálsky ekonóm, známy vďaka svojej práci o zjednocovaní vnútornej a vonkajšej rovnováhy

<sup>10</sup>Neoklasicismus je súhrnné označenie pre niektoré ekonomické názorové prúdy v 20. a 21. storočí, ktoré sa zameriavajú hlavne na distribúciu tovaru a príjmu skrze ponuku a dopyt

veličinu, a tou je ľudská práca  $L(t)$ . Kapitál  $K(t)$  a prácu  $L(t)$  budeme nazývať *výrobné faktory*. Rovnako ako v predchádzajúcom modeli budeme považovať všetky tieto veličiny za kladné.

### 2.3.1 Zavedenie modelu

Táto podkapitola je inšpirovaná [15].

Prvé dva predpoklady sú rovnaké ako v prípade Harrodovho-Domarovho modelu, takže bude platiť predpoklad **(HD1)** vyjadrený rovnicou (2.20) a predpoklad **(HD2)** vyjadrený rovnicou (2.21).

Ďalej budeme predpokladať:

**(SS1)** Relatívna zmena práce v čase je konštantná

$$\frac{L'}{L} = \lambda, \quad (2.26)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**(SS2)** Produkcia sa dá zapísať ako funkcia kapitálu a práce

$$Q = f(K, L), \quad (2.27)$$

kde  $f(K, L)$  sa nazýva *produkčná funkcia*. Aby táto funkcia vystihovala ekonomickú realitu, musí spĺňať niekoľko podmienok:

1. Nemôžeme vyprodukovať záporné množstvo výrobkov, preto  $f(K, L)$  musí byť nezáporná. My uvažujeme situáciu s kladnou produkciou, takže v našom prípade bude  $f(K, L) > 0$  pre  $\forall K > 0, \forall L > 0$ .
2. Malá zmena množstva výrobného faktoru vyvolá malú zmenu produkcie. To znamená, že  $f(K, L)$  je spojitá.
3. Zvýšenie množstva výrobného faktoru nemôže vyvolať zníženie produkcie. A naopak, zníženie množstva výrobného faktoru nemôže mať za následok zvýšenie produkcie. To znamená, že  $f(K, L)$  je neklesajúca pre  $\forall K > 0, \forall L > 0$  a vo všetkých smeroch [16]

$$\frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \geq 0, \quad \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \geq 0.$$

4. Platí zákon klesajúcich výnosov - ak jeden z výrobných faktorov rastie v pevne stanovených a rovnako veľkých množstvách, zatiaľ čo množstvo druhého výrobného faktoru zostáva konštantné, množstvo dodatočného (marginálneho) výstupu nerastie. Spočiatku môže byť konštantné, no od istého bodu začne klesať. To znamená, že výstup môže spočiatku rásť konštantnou rýchlosťou, no od istého bodu bude rásť stále pomalšie. [14]

Z toho vyplýva, že druhé derivácie budú záporné pre  $\forall K > 0, \forall L > 0$  v smeroch rovnobežných s osami [16]. Funkcia  $f(K, L)$  je konkávna

$$\frac{\partial^2 f(K, L)}{\partial K^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f(K, L)}{\partial L^2} \leq 0.$$

Zákon klesajúcich výnosov si ukážeme na nasledujúcom príklade.

**Príklad 2.32** Predstavme si hospodára, ktorý vlastní pole o určitej rozlohe a chce zamestnať ľudí, ktorí by sa oň starali. Na tomto poli sa bude pestovať nejaká plodina. Množstvá plodiny, ktoré sú rôzne počty zamestnancov schopné vypestovať, a dodatočné prínosy každého zamestnanca sú uvedené v Tabuľke 1.

Tab. 2: Množstvo zamestnancov a ich prínos (Zdroj: vlastný)

Množstvo zamestnancov	1	2	3	4	5	6	7	7+
Množstvo plodiny vypestovanej na poli [kg]	20	34	42	48	52	54	54	54
Dodatočný prínos zamestnanca [kg]	20	14	8	6	4	2	0	0

Vidíme, že ak pole považujeme za konštantný výrobný faktor a budeme postupne pridávať zamestnancov, dodatočný výnos spojený so zamestnaním každej ďalšej osoby bude postupne klesať, až sa dostane na 0.

Zákon klesajúcich výnosov pri zmene kapitálu  $\Delta K$  môžeme zapísať aj ako nerovnosť

$$f(K, L) - f(K - \Delta K, L) \geq f(K + \Delta K, L) - f(K, L),$$

pre akékoľvek  $L$ . Z toho vyplýva

$$f(K, L) \geq \frac{1}{2}(f(K - \Delta K, L) + f(K + \Delta K, L)).$$

Rovnako zákon klesajúcich výnosov pri zmene práce  $\Delta L$  môžeme vyjadriť ako

$$f(K, L) \geq \frac{1}{2}(f(K, L - \Delta L) + f(K, L + \Delta L)),$$

pre ľubovoľné  $K$ . Zároveň vidíme, že pre veľké hodnoty  $K$  pri konštantnej hodnote  $L$  dodatočný rast produktu klesá, až nakoniec pôjde k 0. To isté platí aj pre vysoké hodnoty  $L$ , keď  $K$  ostáva konštantné.

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} (f(K + \Delta K, L) - f(K, L)) &= 0, \\ \lim_{L \rightarrow \infty} (f(K, L + \Delta L) - f(K, L)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

**(SS3)** Produkcia vykazuje konštantné výnosy z rozsahu, teda výnosy sú priamo úmerné rozsahu výroby. To znamená, že produkčná funkcia je lineárne homogénna [17]

$$f(\alpha K, \alpha L) = \alpha f(K, L), \quad \forall \alpha > 0. \quad (2.29)$$

Teraz zavedieme novú veličinu  $\kappa(t)$  vyjadrujúcu počet jednotiek kapitálu, ktoré prislúchajú jednej jednotke práce

$$\kappa = \frac{K}{L}. \quad (2.30)$$

Veličina  $\kappa(t)$  sa nazýva *miera vybavenosti práce kapitálom*, je závislá na čase a vždy kladná. Podľa tejto rovnice môžeme napísať

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \left( \frac{K}{L} \right)' \frac{L}{K}.$$

To ďalej upravíme

$$\left( \frac{K}{L} \right)' \frac{L}{K} = \frac{L}{K} \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'L^2}{KL^2} - \frac{KLL'}{KL^2} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Využitím vzťahov (2.20) a (2.26) získame

$$\frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} = \frac{I}{K} - a - \lambda.$$

Veličinu  $I$  nahradíme výrazom (2.21), premennú  $Q$  podľa rovnice (2.27) zapíšeme ako funkciu dvoch premenných  $L$  a  $K$  a rovnicu ďalej upravíme pomocou vzťahu (2.29)

$$\frac{I}{K} - a - \lambda = \frac{sQ}{K} - a - \lambda = \frac{sf(K, L)}{K} - a - \lambda = \frac{sL}{K} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) - (a + \lambda).$$

Podľa rovnice (2.30) môžeme podiel  $\frac{K}{L}$  nahradiť veličinou miery vybavenosti práce kapitálom  $\kappa$

$$\frac{sL}{K}f\left(\frac{K}{L}, 1\right) - (a + \lambda) = \frac{s}{\kappa}f(\kappa, 1) - (a + \lambda).$$

Funkcia jednej premennej  $f(\kappa, 1)$  sa nazýva *produkčná funkcia v intenzívnom tvare*. Je to spojitá neklesajúca konkávna funkcia, pre ktorú podľa výrazu (2.28) platí

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (f(\kappa + \Delta\kappa, 1) - f(\kappa, 1)) = 0,$$

pre každé  $\Delta\kappa > 0$ . Z monotónnosti a kladnosti  $f(\kappa, 1)$  plynie

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} f(\kappa, 1) = f_0, \quad f_0 > 0.$$

Postupne sme dostali

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{s}{\kappa}f(\kappa, 1) - (a + \lambda),$$

a teda

$$\kappa' = sf(\kappa, 1) - (a + \lambda)\kappa. \quad (2.31)$$

Táto rovnica sa nazýva *základná dynamická rovnica neoklasického modelu*. Jedná sa o autonómnu diferenciálnu rovnicu, ktorú rozoberieme v nasledujúcej podkapitole.

### 2.3.2 Matematická analýza riešenia modelu

Označme stacionárny bod tejto rovnice  $\kappa^*$ . Potom  $\kappa^*$  musí spĺňať

$$sf(\kappa^*, 1) - (a + \lambda)\kappa^* = 0,$$

čiže

$$sf(\kappa^*, 1) = (a + \lambda)\kappa^*. \quad (2.32)$$

Koeficienty  $s$ ,  $\kappa^*$  sú kladné a funkcia  $f(\kappa, 1)$  je kladná pre každé  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ , čiže aj ľavá strana rovnice (2.32) je vždy kladná. Aby mohla platiť rovnosť a stacionárny bod  $\kappa^*$  existoval, musí byť aj pravá strana tejto rovnice kladná. To môže nastať iba v prípade, ak platí

$$a + \lambda > 0, \quad (2.33)$$

čiže rýchlosť prípadného úbytku obyvateľstva musí byť menšia ako rýchlosť amortizácie kapitálu.

Aby existoval stacionárny bod  $\kappa^*$ , musí zároveň byť splnené

$$\exists \kappa^* > 0 \text{ také, že } \forall \kappa \in (0, \kappa^*) : \frac{a + \lambda}{s} \kappa < f(\kappa, 1). \quad (2.34)$$

V tomto prípade je pravá strana rovnice (2.31) kladná pre  $\kappa < \kappa^*$  a záporná pre  $\kappa > \kappa^*$ . Z toho vyplýva, že pre každé riešenie  $\kappa(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t) = \kappa^*,$$

vybavenosť práce kapitálom konverguje ku konštante  $\kappa^*$ . Stacionárny bod  $\kappa^*$  je teda asymptoticky stabilný.

**Poznámka** Podľa vzťahu (2.29) platí

$$f(\kappa, 1) = f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L} f(K, L) = \frac{Q(K, L)}{L}.$$

Kapitálovú náročnosť produkcie  $r(t)$  podľa rovnice (2.23) môžeme vyjadriť ako

$$r = \frac{K}{Q} = \frac{K}{L} \frac{L}{Q} = \frac{\kappa}{f(\kappa, 1)}.$$

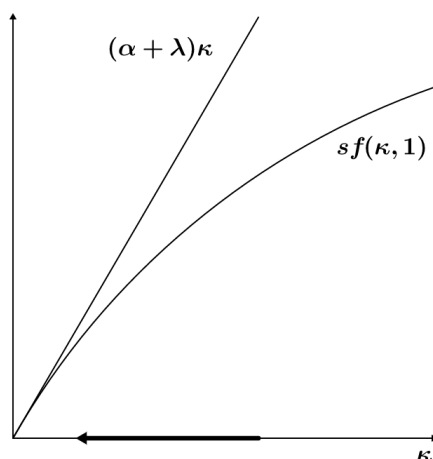
V tomto prípade, narozdiel od Harrodovho-Domarovho modelu, je veličina  $r$  závislá od času. Zo spojitosti funkcie  $f(\kappa, 1)$  plynie, že existuje limita  $r^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{Q(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa}{f(\kappa, 1)} = \frac{\kappa^*}{f(\kappa^*, 1)} = r^*.$$

Teda kapitálová náročnosť produkcie sa ustáli na určitej hodnote. Keď toto porovnáme so vzťahom (2.23) a treťou podmienkou Harrodovho-Domarovho modelu vidíme, že Harrodov-Domarov model je limitným prípadom modelu Solowova-Swana.

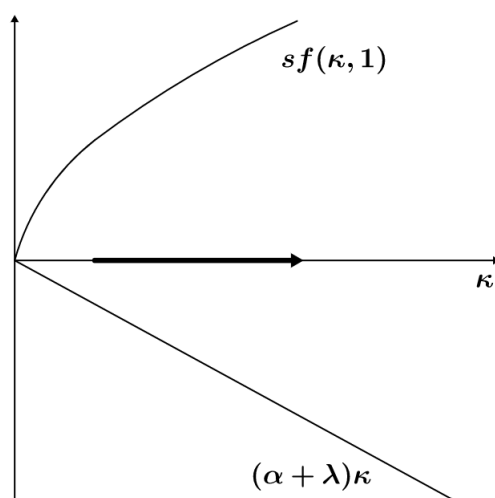
### 2.3.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu

(1) V prípade, že je splnená podmienka (2.33), ale nie je splnená podmienka (2.34), pravá strana rovnice (2.31) je záporná. Riešenie  $\kappa(t)$  konverguje k nule. Pomer kapitálu ku práci sa teda blíži nule a kapitál postupne vymizne. Ekonomika speje ku kolapsu. Situácia je znázornená na Obr. 11 s fázovým portrétom zobrazeným na vodorovnej osi.



Obr. 11: Vývin riešenia  $\kappa(t)$  v prípade (1) (Zdroj: vlastný)

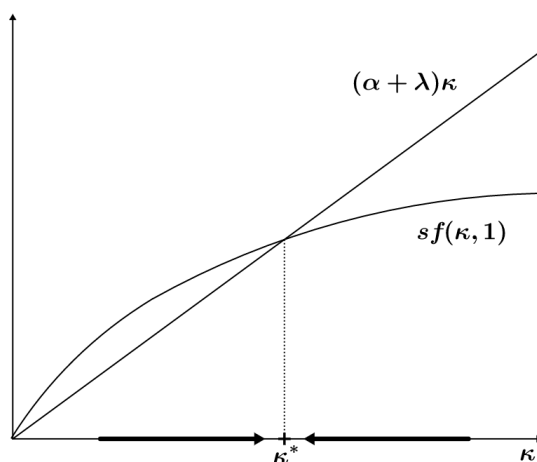
(2) Ak je splnená podmienka (2.34), ale nie je splnené (2.33), je pravá strana rovnice (2.31) kladná a riešenie  $\kappa(t)$  diverguje do nekonečna. V tomto prípade rastie kapitál a postupne vymizne práca. Ekonomia opäť speje ku kolapsu. Situácia je znázornená na Obr. 12 s fázovým portrétom zobrazeným na vodorovnej osi.



Obr. 12: Vývin riešenia  $\kappa(t)$  v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

(3) Ak sú splnené obidve podmienky, existuje rovnovážny stav  $\kappa^*(t)$ , ku ktorému miera vybavenosti práce kapitálom konverguje. Ekonomia sa v čase blíži ku svojmu rovnovážnemu stavu. Situácia je znázornená na Obr. 13 s fázovým portrétom zobrazeným na vodorovnej osi.





Obr. 13: Vývin riešenia  $\kappa(t)$  v prípade (3) (Zdroj: vlastný)

### 2.3.4 Leontiefova produkčná funkcia

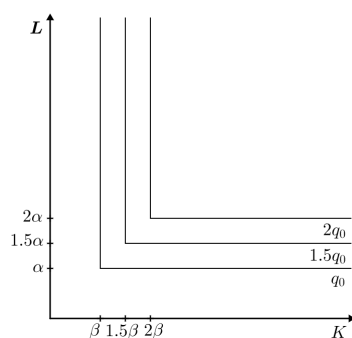
Leontiefova produkčná funkcia je produkčná funkcia v tvare

$$f(K, L) = \min\{\alpha K, \beta L\},$$

kde  $\alpha, \beta$  sú kladné reálne konštanty. Je to najjednoduchší typ produkčnej funkcie, v ktorej výrobné faktory vstupujú do produkcie v pevne stanovených pomeroch a nemôžu sa navzájom zastúpiť. [17]

Pre lepšie predstavenie Leontiefovej produkčnej funkcie nám môže poslúžiť zobrazenie izokvantov. Izokvant predstavuje všetky kombinácie vstupov, ktoré dávajú rovnaký výstup. Budú to všetky dvojice  $[K_0, L_0]$ , pri ktorých produkčná funkcia nadobúda pevne zvolenú kladnú hodnotu  $q_0$ . Teda všetky  $[K_0, L_0]$ , ktoré spĺňajú

$$f(K_0, L_0) = q_0.$$

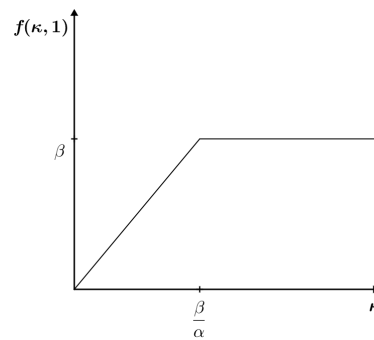


Obr. 14: Izokvanty Leontiefovej produkčnej funkcie (Zdroj: vlastný)

Nech hodnota kapitálu je rovná  $K = K_0$  a hodnota práce  $L = L_0$ . Na tomto grafe môžeme vidieť, že ak je  $\alpha K_0 < \beta L_0$ , k produkcii prispieva celý kapitál ale iba časť práce a jej zvyšok ostáva nevyužitý. Na druhú stranu, ak platí  $\alpha K_0 > \beta L_0$  nevyužitou ostáva časť kapitálu. Všetok kapitál aj všetka práca sú produktívne iba ak platí  $\alpha K_0 = \beta L_0$ .

Leontiefova produkčná funkcia v intenzívnom tvare je

$$f(\kappa, 1) = \min\{\alpha\kappa, \beta\}.$$



Obr. 15: Izokvanty Leontiefovej produkčnej funkcie v intenzívnom tvare (Zdroj: vlastný)

Predpokladajme, že podmienka (2.33) je splnená a teda platí  $a + \lambda > 0$ . Stacionárny bod rovnice (2.31) existuje, iba ak je splnená aj podmienka (2.34), konkrétne keď je splnené

$$\alpha > \frac{a + \lambda}{s}.$$

Keďže podiel  $\frac{a+\lambda}{s}$  je kladný, platí

$$\alpha \frac{s}{a + \lambda} > 1. \quad (2.35)$$

Teda podiel kapitálu na produkcii je dostatočne veľký a kapitál je efektívne využívaný.

V tomto prípade  $f(\kappa^*, 1) = \beta$ . Takže podľa (2.32) máme

$$k^* = \frac{\beta s}{a + \lambda},$$

a zároveň

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{L(t)} = \frac{\beta s}{a + \lambda}.$$

Z tohto a z nerovnosti (2.35) dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha K(t)}{\beta L(t)} = \frac{\alpha s}{a + \lambda} > 1,$$

z čoho vyplýva

$$\alpha K > \beta L.$$

Čiže v stabilnej ekonomike je  $\beta L < \alpha K$  a teda v nej ostáva nevyužitý kapitál.

**Príklad 2.33** Uvažujme ekonomiku, v ktorej sa usporí 20% produkcie a opotrebuje sa 10% kapitálu. Nech práca rastie konštantnou rýchlosťou 5% a nami uvažovaná produkčná funkcia má tvar

$$f(K, L) = \min\{5K, 3L\}.$$

Teda  $s = 0,2$ ,  $a = 0,1$ ,  $\lambda = 0,05$ ,  $\alpha = 5$  a  $\beta = 3$ . Keďže platí nerovnosť (2.35):  $\frac{1}{0,1+0,05} > 1$ , v tomto prípade bude existovať stacionárny bod  $\kappa^*$

$$\kappa^* = \frac{0,6}{0,1 + 0,05} = 4.$$

Tento stacionárny bod je asymptoticky stabilný, takže ekonomika sa ustáli na tomto rovnovážnom stave, pri ktorom bude v ekonomike 4-krát viac kapitálu ako práce. Označme množstvo práce konštantou  $\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^+$ . Potom množstvo kapitálu je rovné  $4\ell$ . Dostávame hodnotu produkcie

$$f(K, L) = \min\{20\ell, 3\ell\} = 3\ell,$$

a časť kapitálu o veľkosti  $17\ell$  ostáva nevyužívaná.

## 2.4 Goodwinov model hospodárskeho cyklu

Posledný model, ktorý si predstavíme je Goodwinov<sup>11</sup> model hospodárskeho cyklu. Tento model nesleduje rast produkcie, ale s ním spojené cykly. Popisuje kolísanie nezamestnanosti, mzdy a investícií. Fungovanie celého systému v ekonomike vysvetľuje na princípe predátor-korisť. Dochádza k boju medzi zamestnancami, ktorí sa snažia o čo najvyššie výplaty, a zamestnávateľmi, ktorí chcú čo najvyšší podiel kapitálu na produkcii, pričom pri zisku jednej strany druhá stráca. [18]

Pre popísanie týchto cyklov budeme opäť používať produkciu  $Q(t)$ , investície  $I(t)$  a ľudskú prácu  $L(t)$ , ktorá bude v tomto prípade vyjadrovať množstvo zamestnaného

---

<sup>11</sup>Richard Goodwin (1913–1996), americký matematik a ekonóm, známy predovšetkým vďaka svojej práci o hospodárskych cykloch

obyvateľstva. Navyše budeme využívať aj všetko práceschopné obyvateľstvo  $N(t)$  a priemernú mzdu za prácu  $W(t)$ . Opäť nemôže byť zamestnaný záporný počet občanov a nemôžu dostávať zápornú mzdu, čiže všetky tieto veličiny budeme považovať za nezáporné. Keďže situácia s nulovými veličinami je pre nás nezaujímavá, všetky tieto veličiny budeme opäť považovať za kladné.

### 2.4.1 Zavedenie modelu

Táto podkapitola je inšpirovaná [15].

Najskôr zavedieme niekoľko premenných. *Produktivita práce*

$$\sigma(t) = \frac{Q(t)}{L(t)}, \quad (2.36)$$

vyjadruje priemerné množstvo produktu, ktoré vytvorí jeden pracujúci človek a bude to vždy kladná konštanta. *Relatívna zamestnanosť*  $v(t)$  bude vyjadrovať pomer zamestnaného obyvateľstva ku práceschopnému obyvateľstvu

$$v(t) = \frac{L(t)}{N(t)}. \quad (2.37)$$

Veličina  $u(t)$  predstavujúca *podiel mzdy na produkcii*

$$u(t) = \frac{W(t)L(t)}{Q(t)}, \quad (2.38)$$

udáva, aká časť produkcie sa vyplatí pracujúcim v mzdách. Obidve veličiny,  $u(t)$  aj  $v(t)$ , budú nadobúdať hodnoty z intervalu  $(0, 1)$ .

Budeme uvažovať predpoklady **(HD1)** a **(HD3)** vyjadrené rovnicami (2.20), (2.22) a (2.23). Ďalej budeme predpokladať:

**(G1)** Všetká čistá produkcia, tj. produkcia bez mzdy vyplatenej pracujúcim obyvateľom, sa investuje

$$I = Q - WL. \quad (2.39)$$

**(G2)** Relatívna zmena práceschopného obyvateľstva je konštantná

$$\frac{N'}{N} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

**(G3)** Technologický pokrok má za následok konštantný relatívny rast produktivity práce

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \beta, \quad \beta > 0. \quad (2.41)$$

**(G4)** Relatívna zmena mzdovej sadzby závisí na zamestnanosti

$$\frac{W'}{W} = \zeta(v), \quad \zeta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.42)$$

kde  $\zeta(v)$  je diferencovateľná funkcia, ktorej grafom je *Phillipsova*<sup>12</sup> *krivka*<sup>13</sup>. Jej vlastnosti zistené pozorovaním sú:

1. Funkcia  $\zeta(v)$  je na svojom definičnom obore rastúca a konvexná

$$\zeta(v)' > 0, \zeta(v)'' > 0, \text{ pre } v \in (0, 1).$$

2. Pri veľkej nezamestnanosti mzdy klesajú a ľudia sú ochotní pracovať za veľmi nízkou mzdou

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \zeta(v) = \zeta_0 < 0.$$

3. Pri veľkej zamestnanosti mzdy rastú a keď chceme získať nového zamestnanca, musíme ho preplatiť

$$\lim_{v \rightarrow 1^-} \zeta(v) = \zeta_1 > 0,$$

kde sa pripúšťa (a často aj predpokladá)  $\zeta_1 = \infty$ .

Podľa rovnice (2.37) môžeme vyjadriť relatívnu zmenu zamestnanosti ako

$$\frac{v'}{v} = \left( \frac{L}{N} \right)' \frac{N}{L} = \frac{N}{L} \frac{L'N - LN'}{N^2} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N}.$$

Ďalej môžeme využitím výrazov (2.36) a (2.40) veličinu  $L$  nahradiť podielom práce a produktivity práce, a relatívnu zmenu práce konštantou  $\alpha$

$$\frac{L'}{L} - \frac{N'}{N} = \left( \frac{Q}{\sigma} \right)' \frac{\sigma}{Q} - \alpha = \frac{Q'}{Q} - \frac{\sigma'}{\sigma} - \alpha. \quad (2.43)$$

Podiel  $\frac{Q'}{Q}$  môžeme kombináciou výrazov (2.22) a (2.20) vyjadriť ako

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{K'}{K} = \frac{I - aK}{K}.$$

Po dosadení rovníc (2.39), (2.38) a (2.23) dostaneme

$$\frac{I - aK}{K} = \frac{Q - WL}{K} - a = \frac{Q}{K} \left( 1 - \frac{WL}{Q} \right) - a = \frac{1}{r^*} (1 - u) - a,$$

<sup>12</sup>William Phillips (1914 - 1975), novozélandský ekonóm, známy predovšetkým vďaka svojej práci o vplyve inflácie a nezamestnanosti na výšku mzdy

<sup>13</sup>Phillipsova krivka je krivka, ktorá popisuje vzťah medzi nezamestnanosťou a infláciou

čiže

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{r^*}(1 - u) - a.$$

Toto dosadíme do rovnice (2.43) a podľa (2.41) nahradíme relatívny rast produktivity práce konštantou

$$\frac{Q'}{Q} - \frac{\sigma'}{\sigma} - \alpha = \frac{1}{r^*}(1 - u) - a - \beta - \alpha.$$

Ak označíme  $\delta = \frac{1}{r^*} - a - \beta - \alpha$ , dostaneme

$$\frac{v'}{v} = \delta - \frac{1}{r^*}u. \quad (2.44)$$

Relatívnu zmenu podielu mzdy na produkcii vyjadríme pomocou rovníc (2.38), (2.36) ako

$$\frac{u'}{u} = \left( \frac{WL}{Q} \right)' \frac{Q}{WL} = \left( \frac{W}{\sigma} \right)' \frac{\sigma}{W} = \frac{W'}{W} - \frac{\sigma'}{\sigma},$$

z čoho po využití rovníc (2.41) (2.42) vyplýva

$$\frac{u'}{u} = \zeta(v) - \beta. \quad (2.45)$$

Rovnice (2.44) a (2.45) predstavujú model vývoja podielu mzdy na produkcii a relatívnej zamestnanosti. Rovnice môžeme prepísať do obvyklého tvaru

$$\begin{aligned} u' &= u(\zeta(v) - \beta), \\ v' &= v \left( \delta - \frac{1}{r^*}u \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 2.4.2 Matematická analýza riešenia modelu

Fázový priestor sústavy (2.46) je  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Vieme, že  $\frac{1}{r^*}$  a  $\beta$  sú kladné. Budeme predpokladať, že aj  $\delta$  je kladná a že  $\zeta_1 > \beta$ . V tom prípade existuje  $v^*$  také, že  $\zeta(v^*) = \beta$ , čiže  $\zeta^{-1}(\beta) = v^*$ . Systém (2.46) má v obore reálnych čísel dva stacionárne body. My sme predpokladali, že  $u$  a  $v$  sú kladné, preto budeme brať do úvahy iba jeden z nich, a to

$$(u^*, v^*) = (r^*\delta, \zeta^{-1}(\beta)).$$

Jackobiho matica systému (2.46) je

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \zeta(v) - \beta & u\zeta'(v) \\ -\frac{1}{r^*}v & \delta - \frac{1}{r^*}u \end{pmatrix},$$

teda

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} 0 & r^* \delta \zeta'(v^*) \\ -\frac{1}{r^*} v^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Keďže  $\det J(u^*, v^*) = \delta v^* \zeta'(v^*)$  a  $\text{tr} J(u^*, v^*) = 0$ , o type stacionárneho bodu  $(u^*, v^*)$  nevieme použitím Tabuľky 1 rozhodnúť. Budeme teda hľadať vyjadrenie trajektórií systému (2.46). Vydelením rovníc tohoto systému dostaneme

$$\frac{du}{dv} = \frac{v(\delta - \frac{1}{r^*} u)}{u(\zeta(v) - \beta)}.$$

Toto je diferenciálna rovnica so separovanými premennými. Jej riešenie je podľa (1.7) dané

$$\int \frac{\zeta(v) - \beta}{v} dv = \int \frac{\delta - \frac{1}{r^*} u}{u} du,$$

čo môžeme prepísať ako

$$\frac{1}{r^*} u - \ln(u^\delta v^\beta) + \int_{v_0}^v \frac{\zeta(x)}{x} dx = c, \quad (2.47)$$

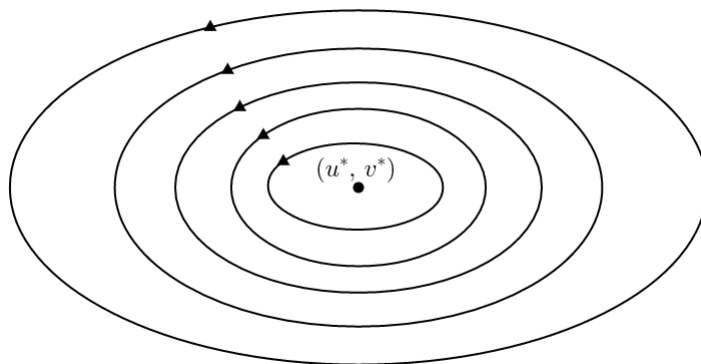
kde  $c$  je reálna konštanta a  $v_0 \in (0, 1)$  je konštanta vyjadrujúca počiatočnú zamestnanosť. Keď označíme ľavú stranu rovnosti (2.47) ako funkciu  $\mathcal{G}(u, v)$  dostaneme riešenie dané implicitne

$$\mathcal{G}(u, v) = c.$$

Trajektórie systému (2.46) sú teda vrstevnicami funkcie  $\mathcal{G}$ . Vieme, že platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(u^*, v^*)}{\partial u} &= \frac{1}{r^*} - \frac{\delta}{u^*} = \frac{\frac{1}{r^*} u^* - \delta}{u^*} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{G}(u^*, v^*)}{\partial v} &= -\frac{\beta}{v^*} + \frac{\zeta(v^*)}{v^*} = \frac{\zeta(v^*) - \beta}{v^*} = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{G}(u^*, v^*)}{\partial u^2} &= \frac{\delta}{u^{*2}} > 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{G}(u^*, v^*)}{\partial u \partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{G}(u^*, v^*)}{\partial v^2} &= \frac{v \zeta'(v) - (\zeta(v) - \beta)}{v^2} = \frac{\zeta'(v^*)}{v^*} > 0. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že bod  $(u^*, v^*)$  je lokálnym minimom funkcie  $\mathcal{G}$  a tá je v jeho okolí konvexná. Čiže trajektórie systému (2.46) v okolí tohto stacionárneho bodu tvoria uzavreté krivky a stacionárny bod  $(u^*, v^*)$  je stred.



Obr. 16: Stacionárny bod  $(u^*, v^*)$  (Zdroj: vlastný)

### 2.4.3 Ekonomická interpretácia riešenia modelu

Vidíme, že relatívna zamestnanosť aj podiel mzdy na produkcii kolíšu okolo rovnovážnej hodnoty. Čím je miera zamestnanosti vyššia, tým vyššie mzdy zamestnanci požadujú a podiel mzdy na produkcii rastie. Tým pádom sa znižuje podiel investícií na produkcii a znižujú sa zisky zamestnávateľov. Nižšie zisky odradia ľudí od podnikania. Následkom je menej pracovných pozícií, väčšie množstvo uchádzačov o zamestnanie a zníženie mzdy. To priláka nových podnikateľov, ktorí vytvoria nové pracovné pozície a mzdy zasa narastú. Toto sa deje opakovane v určitých cykloch. [18]

**Príklad 2.34** Uvažujme ekonomiku, v ktorej je relatívna zmena práceschopného obyvateľstva konštantná a rovná 0,14, kapitálová náročnosť produkcie  $r^* = 0,2$ , konštantný relatívny nárast produkcie je  $\beta = 1,56$  a práceschopného obyvateľstva je  $\alpha = 0,24$ , opotrebuje sa 20% kapitálu a funkcia  $\zeta$  je daná predpisom  $\zeta(v) = 4v^2 - 1$ .

Potom  $\delta = 3$ , čiže  $u^* = 0,6$ . Hodnotu  $v^*$  nájdeme ako  $\zeta^{-1}(\beta) = 0,8$ . Stacionárny bod je  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ , čiže ekonomika by bola v rovnováhe, ak by mzda vyplatená zamestnancom tvorila 60% produkcie a bolo by zamestnaných 80% práceschopných občanov. Reálne hodnoty  $u$  a  $v$  v našej ekonomike budú kolísať okolo tejto rovnovážnej hodnoty.



### 3 VLASTNÉ NÁVRHY RIEŠENÍ

#### Analýza Walrasovho modelu cenového prispôsobenia

V predchádzajúcej kapitole sme si predstavili a zaviedli štyri ekonomické modely. V každom z týchto modelov sme uviedli niekoľko predpokladov, s ktorými sme následne pracovali a považovali sme ich za pravdivé. V tejto kapitole si jeden z týchto modelov, konkrétne Walrasov model cenového prispôsobenia, rozoberieme podrobnejšie. Nebudeme uvažovať predpoklady (WA1) a (WA2), ale rozanalyzujeme situáciu s konštantnou funkciou ponuky a rôznymi typmi funkcií dopytu.

V každej časti si najskôr predstavíme funkcie, ktorými sa budeme ďalej zaoberať, a poskytneme príklady výskytu týchto funkcií. Potom zostavíme príslušnú diferenciálnu rovnicu, nájdeme stacionárne body tejto diferenciálnej rovnice a určíme ich typy. Nakoniec nájdeme riešenie diferenciálnej rovnice a riešenie počiatkovej úlohy. Toto riešenie budeme vždy uvažovať na nami zvolenom časovom intervale  $t \in \langle 0, t_l \rangle$ , kde  $t_l$  je kladná konštanta.

#### Situácia s konštantnou funkciou ponuky

Konštantná funkcia ponuky je funkcia v tvare

$$S(p) = S^*,$$

kde  $S^*$  je kladná konštanta. Je to pomerne netradičný druh funkcie ponuky. V tomto prípade je množstvo ponúkaného produktu konštantné bez ohľadu na cenu. Môže predstavovať situáciu s obmedzeným množstvom predávajúcich na malom trhu a vo veľmi krátkom časovom úseku. Títo predávajúci ponúkajú výrobok, ktorého majú obmedzené množstvo a ktorý potrebujú predať bez ohľadu na cenu.

Ako príklad si uvedieme farmára, ktorý vypestoval veľké množstvo broskýň a snaží sa ich predať na miestnom trhu. Tento farmár potrebuje svoj produkt predať, inak by sa pokazil. Množstvo ponúkaných broskýň je konštantné bez ohľadu na ponúknutú cenu. Preto funkcia ponuky bude v tomto prípade konštantná.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup>V uvedenom prípade samozrejme uvažujeme v krátkom časovom intervale, v ktorom tento farmár ani ostatní farmári nemajú množstvo prispôbiť množstvo produktu cene. Pôjde o interval niekoľkých hodín, maximálne dní.

### 3.1 Dopyt daný konštantnou funkciou

Rovnako, ako v prípade ponuky, je dopyt daný konštantnou funkciou pomerne netradičný. Funkcia dopytu má tvar

$$D(p) = D^*,$$

kde  $D^*$  je kladná konštanta vyjadrujúca množstvo dopytu pri akejkoľvek cene. Takúto dopytovú funkciu môže mať produkt nevyhnutný pre prežitie, za ktorý sme ochotní zaplatiť akúkoľvek cenu, ale potrebujeme ho iba určité množstvo.

Typickým príkladom je inzulín, alebo iný liek, ktorí ľudia trpiaci určitou chorobou potrebujú a pre ostatných je zbytočný. Často sa ako príklad konštantného dopytu uvádza aj dopyt po drogách - drogový závislý človek je za ne ochotný zaplatiť akúkoľvek čiastku a cena nemá na jeho spotrebu vplyv. Ostatní ľudia o drogy záujem nemajú bez ohľadu na cenu.

Dosadením do rovnice (2.16) získame autonómnou diferenciálnu rovnicu

$$p'(t) = \gamma(D^* - S^*). \quad (3.48)$$

V prípade, že uvažujeme aj nad počiatočnou cenou  $p_0$  v čase  $t = 0$ ,  $p_0 \geq 0$ , dostaneme počiatočnú úlohu

$$p'(t) = \gamma(D^* - S^*), \quad p(0) = p_0. \quad (3.49)$$

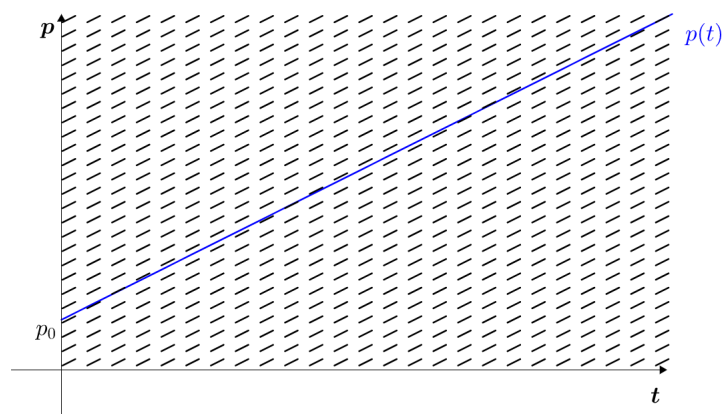
Riešenie diferenciálnej rovnice (3.48) bude závisieť na konštante  $D^* - S^*$ . Táto konštanta môže byť **(1)** kladná, **(2)** nulová alebo **(3)** záporná. Postupne rozoberieme všetky tieto možnosti.

**(1)** Ak je táto konštanta  $D^* - S^*$  kladná, rovnica (3.48) nemá žiadny stacionárny bod. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$p(t) = \gamma(D^* - S^*)t + c,$$

kde  $c$  je reálna konštanta spĺňajúca  $\gamma(D^* - S^*)t \geq -c$  pre  $\forall t \in \langle 0, t_l \rangle$ . Riešenie počiatočnej úlohy (3.49) vyzerá nasledovne

$$p(t) = \gamma(D^* - S^*)t + p_0.$$



Obr. 17: Riešenie počiatkovej úlohy (3.49) v prípade (1) (Zdroj: vlastný)

V tomto prípade je dopyt pre akúkoľvek cenu väčší ako ponuka. Cena bude s rastúcim časom lineárne narastať.

(2) Ak platí  $D^* - S^* = 0$ , rovnica (3.48) má nekonečne veľa stacionárnych bodov

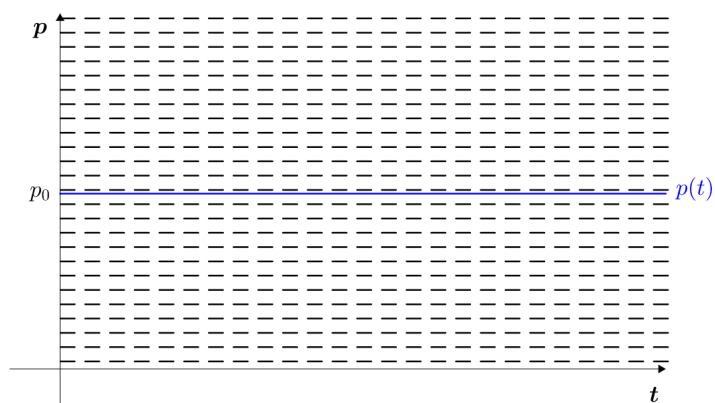
$$p^* = c,$$

kde  $c$  je nezáporná reálna konštanta. Každý z týchto stacionárnych bodov je stabilný. Riešením našej rovnice potom bude

$$p(t) = c,$$

a riešením počiatkovej úlohy (3.49)

$$p(t) = p_0.$$



Obr. 18: Riešenie počiatkovej úlohy (3.49) v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

Ak sú ponuka a dopyt rovnako veľké, cena sa v čase nebude meniť, ostane na hodnote počiatočnej ceny  $p_0$ .

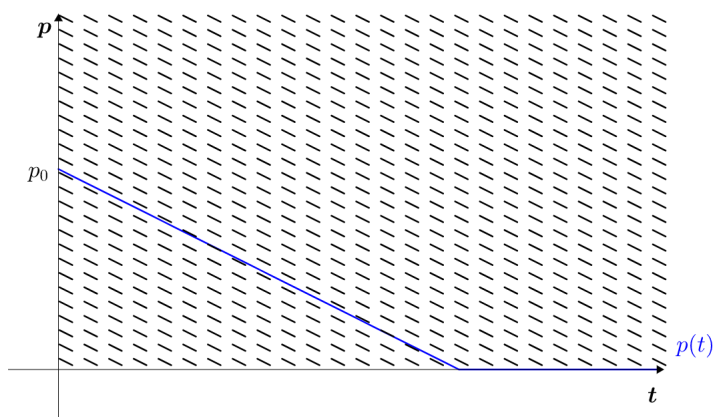
(3) Ak je konštanta  $D^* - S^*$  záporná, rovnica (3.48) opäť nebude mať žiadny stacionárny bod. Riešenie tejto rovnice, rovnako ako v prípade (1), bude

$$p(t) = \gamma(D^* - S^*)t + c,$$

kde  $c$  je kladná konštanta spĺňajúca  $c \geq -\gamma(D^* - S^*)t$  pre  $\forall t \in \langle 0, t_l \rangle$ . Riešenie počiatočnej úlohy (3.49) potom je

$$p(t) = \gamma(D^* - S^*)t + p_0.$$

Vzhľadom k prirodzenému predpokladu nezápornej ceny  $p(t)$ , toto riešenie môže platiť iba na intervale  $\langle 0, t_0 \rangle$ , kde  $t_0$  spĺňa  $p(t_0) = 0$ . Pre  $t > t_0$  diferenciálna rovnica (3.48) a teda ani jej riešenie nepopisuje ekonomickú realitu, keďže cena je považovaná za nezápornú veličinu. Preto pre  $t > t_0$  kladieme  $p(t) = 0$ . Obdobný postup použijeme vo všetkých nasledujúcich prípadoch, keď sa vyskytne podobný problém.



Obr. 19: Riešenie počiatočnej úlohy (3.49) v prípade (3) (Zdroj: vlastný)

V prípade  $D^* - S^* < 0$  je ponuka väčšia ako dopyt pre akúkoľvek cenu. Cena bude s rastúcim časom lineárne klesať z hodnoty  $p_0$ , až na hodnotu 0, na ktorej sa následne ustáli.

**Príklad 3.35** Predstavme si situáciu s konštantným dopytom  $D(t) = D^* = 4$ , konštantnou ponukou  $S(t) = S^* = 3$ , počiatočnou cenou  $p_0 = 10$  a koeficientom prispôbenia sa  $\gamma = 0,05$ . Uvažujeme v časovom intervale  $t \in \langle 0, 3 \rangle$ .

Potom  $D^* - S^* = 1$ , čiže neexistuje žiadny stacionárny bod. Dostávame riešenie počiatočnej úlohy (3.49)

$$p(t) = 0,05t + 10.$$

Cena v našom prípade s rastúcim časom rastie lineárne.

## 3.2 Dopyt daný lineárnou funkciou

V tomto prípade je dopyt, rovnako ako v pôvodnom Walrasovom modeli, popísaný lineárnou funkciou (2.15). Jedná sa o typický príklad dopytu, pri ktorom s rastúcou cenou produktu počet kupujúcich rovnomerne klesá a naopak, s klesajúcou cenou produktu počet kupujúcich rovnomerne stúpa pre akúkoľvek cenu.

Príkladom môže byť chlieb alebo iná bežná potravina, ktorá má substitúty<sup>15</sup> a ktorej vyššia cena nás od kúpi odradí.

Využitím vzťahu (2.16), dostávame autonómnou diferenciálnu rovnicu

$$p'(t) = \gamma((\nu - S^*) + \psi p). \quad (3.50)$$

Ak navyše uvažujeme podmienku na počiatočnú cenu  $p_0$  v čase  $t = 0$ , dostávame počiatočnú úlohu

$$p'(t) = \gamma((\nu - S^*) + \psi p), \quad p(0) = p_0. \quad (3.51)$$

Existencia stacionárnych bodov a riešenie rovnice (3.50) bude znovu závisieť od konštanty  $\nu - S^*$ . Táto konštanta môže byť **(1)** kladná, **(2)** nulová alebo **(3)** záporná. Opäť postupne rozoberieme všetky tri možnosti.

**(1)** V prípade, že konštanta  $\nu - S^*$  je kladná, rovnica (3.50) má jeden stacionárny bod

$$p^* = -\frac{(\nu - S^*)}{\psi}.$$

---

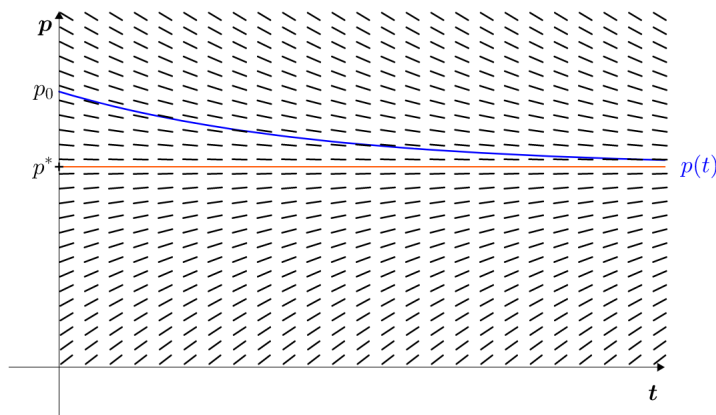
<sup>15</sup>Substitúty sú produkty podobné uvažovanému produktu, ktorými sa dá pôvodný produkt nahradiť

Stabilita tohoto stacionárneho bodu závisí iba od konštanty  $\gamma\psi$ . Keďže táto konštanta je v našom prípade záporná, stacionárny bod je asymptoticky stabilný. Riešenie diferenciálnej rovnice (3.50) má potom tvar

$$p(t) = c e^{\gamma\psi t} - \frac{(\nu - S^*)}{\psi},$$

kde  $c$  je akákoľvek reálna konštanta, pre ktorú je  $p(t)$  nezáporná na nami uvažovanom časovom intervale. Riešenie počiatočnej úlohy (3.51) je

$$p(t) = \left( p_0 + \frac{\nu - S^*}{\psi} \right) e^{\gamma\psi t} - \frac{(\nu - S^*)}{\psi}.$$



Obr. 20: Riešenie počiatočnej úlohy (3.51) v prípade (1) (Zdroj: vlastný)

Z toho vyplýva, že ak je maximálny dopyt väčší ako ponuka, cena s postupom času konverguje ku rovnovážnej hodnote  $-\frac{(\nu - S^*)}{\psi}$ .

**(2)** Ak je konštanta  $\nu - S^*$  rovná nule, rovnica (3.50) má asymptoticky stabilný stacionárny bod

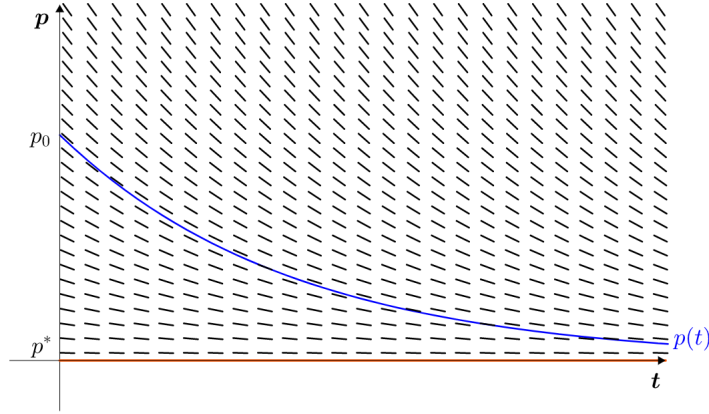
$$p^* = 0.$$

Riešenie našej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$p(t) = c e^{\gamma\psi t},$$

kde  $c$  je nezáporná reálna konštanta. Riešenie počiatočnej úlohy (3.51) bude

$$p(t) = p_0 e^{\gamma\psi t}.$$



Obr. 21: Riešenie počiatocnej úlohy (3.51) v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

V tomto prípade sú maximálny dopyt a ponuka rovnako veľké. Cena bude s rastúcim časom klesať a konvergovať k nule.

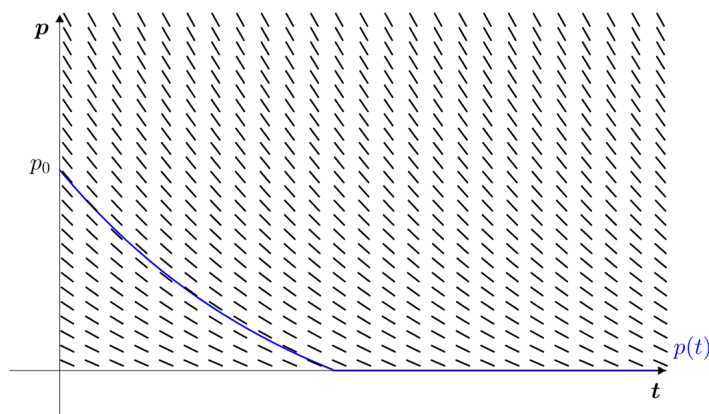
(3) V prípade, že platí  $\nu - S^* < 0$ , rovnica (3.50) má opäť v obore reálnych čísel jeden stacionárny bod, ktorý má však zápornú hodnotu. Keďže my sme predpokladali situáciu s nezápornou cenou, nebudeme tento bod brať do úvahy. Riešenie diferenciálnej rovnice (3.50), rovnako ako v prípade (1), je

$$p(t) = \gamma c e^{\gamma \psi t} - \frac{(\nu - S^*)}{\psi},$$

kde  $c$  je kladná konštanta, ktorá spĺňa  $c \geq \frac{(\nu - S^*)}{\psi} \frac{1}{\gamma e^{\gamma \psi t}}$  pre každé  $t$  patriace nášmu uvažovanému intervalu. Riešením počiatocnej úlohy (3.51) bude

$$p(t) = \left( p_0 + \frac{\nu - S^*}{\psi} \right) e^{\gamma \psi t} - \frac{(\nu - S^*)}{\psi}.$$

Zároveň  $p(t)$  musí byť nezáporné na celom intervale  $\langle 0, t_l \rangle$ . Ak by táto podmienka bola porušená, postupujeme rovnakým spôsobom ako pri riešení počiatocnej úlohy (3.49).



Obr. 22: Riešenie počiatkovej úlohy (3.51) v prípade (3) (Zdroj: vlastný)

Ak je ponuka väčšia ako maximálny dopyt, cena bude v čase klesať, až sa postupne ustáli na hodnote 0.

**Príklad 3.36** Príkladom môže byť produkt, ktorého ponuka je  $S(t) = S^* = 20$ , dopyt  $D(p) = 15 - 0,5p$ , počiatková cena  $p_0 = 20$  a koeficient prispôsobenia sa  $\gamma = 0,5$ . Vývoj ceny budeme uvažovať v časovom intervale 1 dňa, teda  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Potom je konštanta  $\nu - S^*$  záporná, čiže neexistuje kladný reálny stacionárny bod. Riešenie rovnice (3.50) bude v tvare

$$p(t) = 0,5ce^{-0,25t} - 10,$$

kde koeficient  $c$  musí spĺňať  $c \geq 20e^{0,25}$ . Riešenie počiatkovej úlohy je

$$p(t) = 30e^{-0,25t} - 10.$$

Cena bude postupne v čase klesať. Ak by sme uvažovali dlhší časový interval, cena by klesla až na 0 a následne by sa ustálila na tejto hodnote.

### 3.3 Dopyt daný kvadratickou funkciou

V tomto prípade je dopyt popísaný kvadratickou funkciou

$$D(p) = \nu + \eta p + \xi p^2,$$



pre cenu  $p$  patriacu intervalu  $p \in \langle 0, \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\xi\nu}}{2\xi} \rangle$ . Predpokladajme, že dopyt je vyjadrený konkávnou kvadratickou funkciou a že vrchol  $\mathcal{V} = -\frac{\eta}{2\xi}$  príslušnej paraboly patrí intervalu  $V \in (0, \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\xi\nu}}{2\xi})$ . Potom konštanta  $\nu$  je kladná konštanta, predstavujúca dopyt pri nulovej cene. V tomto prípade tento dopyt však nie je maximálny. Konštanta  $\eta$  je kladná a konštanta  $\xi$  záporná. Dopyt po produkte popísaný takouto funkciou s rastúcim  $p$  rastie na intervale  $p \in \langle 0, -\frac{\eta}{2\xi} \rangle$  a klesá na intervale  $p \in \langle -\frac{\eta}{2\xi}, \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\xi\nu}}{2\xi} \rangle$ . Rast dopytu s rastúcou cenou na určitom intervale je ojedinelý jav. Môže nastať iba pri produkte, ktorý nemá substitúty a predstavuje pre spotrebiteľa výraznú časť výdavkov.

Jeden z príkladov takéhoto produktu môže byť ryža v chudobnejších oblastiach Ázie. Výdaje na ryžu predstavujú pre obyvateľov týchto oblastí podstatnú časť ich spotreby a nájsť náhradu za ryžu je pre nich veľmi ťažké. S klesajúcou cenou ryže si môžu spotrebiteľia za ušetrené financie dovoliť nákup lepších potravín, napríklad mäsa. S rastúcou cenou ryže sa však musia konzumácie týchto lepších potravín vzdať, aby si mohli dovoliť kúpiť dostatočné množstvo jedla na celý mesiac, a tak si nakúpiť iba ryžu. Pri určitej cene však pre nich začne byť aj ryža pridrahá a tak časť svojej spotreby presunú na iné, lacnejšie alternatívy a dopyt po ryži začne klesať.

Pre jednoduchosť budeme v tejto časti počítať s koeficientom prispôsobenia sa  $\gamma = 1$ . Dosadením do rovnice (2.16), získame diferenciálnu rovnicu

$$p'(t) = \xi p^2 + \eta p + (\nu - S^*). \quad (3.52)$$

Toto je autonómna diferenciálna rovnica. V prípade, že uvažujeme aj počiatočnú cenu  $p(0) = p_0$ , dostaneme počiatočnú úlohu

$$p'(t) = \xi p^2 + \eta p + (\nu - S^*), \quad p(0) = p_0. \quad (3.53)$$

Stacionárny bod rovnice (3.52) musí spĺňať podmienku

$$\xi p^{*2} + \eta p^* + (\nu - S^*) = 0. \quad (3.54)$$

Počet stacionárnych bodov rovnice (3.52) a aj jej riešenie budú teda závisieť od konštanty  $\nu - S^*$ . Táto konštanta môže byť **(1)** kladná, **(2)** nulová, **(3)** záporná a väčšia ako  $\frac{\eta^2}{4\xi}$ , **(4)** rovná  $\frac{\eta^2}{4\xi}$  alebo **(5)** menšia ako  $\frac{\eta^2}{4\xi}$ . Postupne rozoberieme všetky tieto možnosti.

(1) Konštanta  $\nu - S^*$  je kladná, čiže pri nulovej cene je ponuka menšia ako dopyt. Vieme, že konštanta  $-4\xi(\nu - S^*)$  je taktiež kladná, čiže aj diskriminant je kladný a rovnica (3.54) má dve reálne riešenia. Jedno z týchto riešení je však záporné a my uvažujeme iba situáciu s nezápornou cenou. Preto budeme uvažovať iba jeden stacionárny bod, a to

$$p^* = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\xi(\nu - S^*)}}{2\xi}.$$

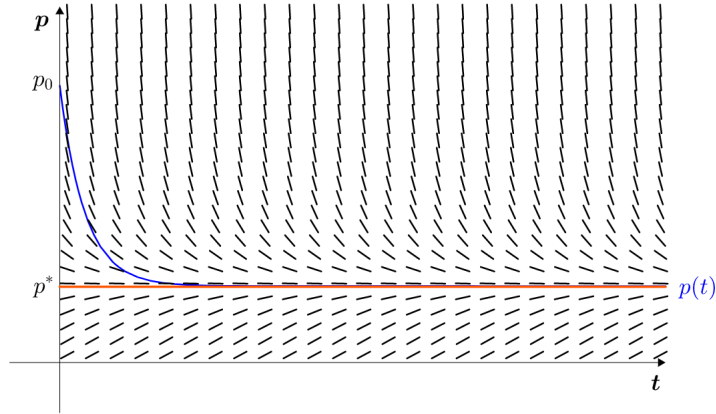
Tento stacionárny bod je asymptoticky stabilný. Označme  $C = \sqrt{\eta^2 - 4\xi(\nu - S^*)}$ . Riešením diferenciálnej rovnice (3.52) potom bude

$$p(t) = \frac{(-\eta + C)e^{Cc} - (\eta + C)e^{Ct}}{2\xi(e^{Cc} + e^{Ct})},$$

kde  $c$  je reálna konštanta, pre ktorú platí  $p(t) \geq 0$  pre  $\forall t \in \langle 0, t_l \rangle$ . Riešenie počiatočnej úlohy je

$$p(t) = \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}tC - \operatorname{arctanh}\left(\frac{2\xi p_0 + \eta}{C}\right)\right)C + \eta}{-2\xi},$$

kde  $p(t) \geq 0$  pre celý uvažovaný časový interval. Ak by táto podmienka nebola splnená, postupujeme rovnako, ako pri riešení úlohy (3.49).



Obr. 23: Riešenie počiatočnej úlohy (3.53) v prípade (1) (Zdroj: vlastný)

Ak je dopyt pri  $p = 0$  väčší ako ponuka, cena postupne v čase konverguje k rovnovážnej hodnote  $p^*$ .

(2) Konštanta  $\nu - S^*$  je nulová. To znamená, že dopyt pri nulovej cene a ponuka sú rovnaké. V tomto prípade má rovnica (3.54) opäť dve reálne riešenia a to

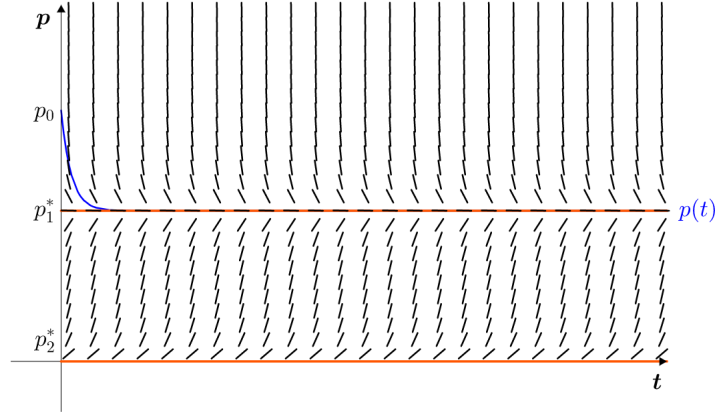
$$p_1^* = -\frac{\eta}{\xi}, \quad p_2^* = 0.$$

Stacionárny bod  $p_1^*$  je v tomto prípade asymptoticky stabilný a stacionárny bod  $p_2^*$  nestabilný. Diferenciálna rovnica (3.52) bude mať riešenie

$$p(t) = \frac{\eta e^{\eta(t+c)}}{1 - \xi e^{\eta(t+c)}},$$

kde  $c$  je akákoľvek reálna konštanta. Riešením počiatkovej úlohy (3.53) bude

$$p(t) = \frac{\eta p_0 e^{\eta t}}{\eta - \xi p_0 (e^{\eta t} - 1)}.$$



Obr. 24: Riešenie počiatkovej úlohy (3.53) v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

V prípade, že dopyt a ponuka sú pri nulovej cene rovnako veľké, sa cena v čase blíži ku hodnote  $p_1^*$ .

**(3)** Konštanta  $\nu - S^*$  je záporná, čiže dopyt je pri nulovej cene menší ako ponuka, ale zároveň väčšia ako  $\frac{\eta^2}{4\xi}$ . Potom má rovnica (3.54) znovu dve reálne riešenia, stacionárne body

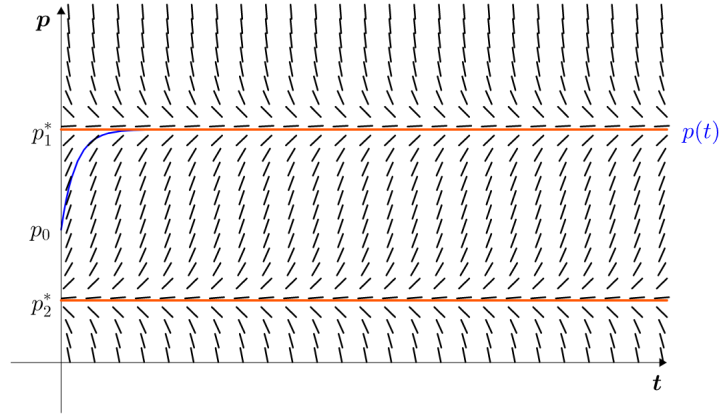
$$p_1^* = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\xi(\nu - S^*)}}{2\xi}, \quad p_2^* = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\xi(\nu - S^*)}}{2\xi}.$$

Opäť je jeden z bodov, konkrétne bod  $p_1^*$ , asymptoticky stabilný a druhý bod,  $p_2^*$ , nestabilný. Znovu označíme  $\mathcal{C} = \sqrt{\eta^2 - 4\xi(\nu - S^*)}$ . Diferenciálna rovnica (3.52) bude mať rovnako, ako v prípade (1) riešenie

$$p(t) = \frac{(-\eta + \mathcal{C})e^{c_c} - (\eta + \mathcal{C})e^{c_t}}{2\xi(e^{c_c} + e^{c_t})},$$

kde  $c$  je zasa reálna konštanta, pre ktorú je cena  $p(t)$  nezáporná pre akékoľvek  $t$  nášho uvažovaného časového intervalu. Riešenie počiatkovej úlohy (3.53) je

$$p(t) = \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}t\mathcal{C} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{2\xi p_0 + \eta}{\mathcal{C}}\right)\right)\mathcal{C} + \eta}{-2\xi},$$



Obr. 25: Riešenie počiatkovej úlohy (3.53) v prípade (3) (Zdroj: vlastný)

Cena v čase konverguje ku hodnote  $p_1^*$  v prípade, že  $p_0 > p_2^*$  a klesá, až sa ustáli na hodnote 0 ak platí  $p_0 < p_2^*$ . Pre  $p_0 = p_1^*$  alebo  $p_0 = p_2^*$  sa cena v čase nemení.

(4) Konštanta  $\nu - S^*$  je rovná  $\frac{\eta^2}{4\xi}$ . Dopyt pri nulovej cene je opäť menší ako ponuka. V tomto prípade má rovnica (3.54) iba jedno reálne riešenie

$$p^* = -\frac{\eta}{2\xi}.$$

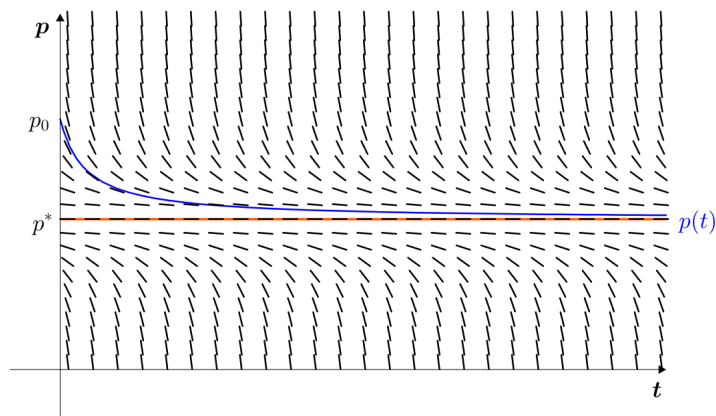
Stacionárny bod  $p^*$  je semistabilný. Pre  $p(0) > p^*$  bude  $p(t)$  klesať a blížiiť sa hodnote  $p^*$ , pre  $p(0) < p^*$  bude  $p(t)$  taktiež klesať, až sa ustáli na hodnote 0, a pre  $p(0) = p^*$  sa cena nebude meniť, ostane konštantná. Diferenciálna rovnica (3.52) bude mať riešenie

$$p(t) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 4(\xi^2(-t) - \xi^2 c)(\xi(\nu - S^*)c + \xi(\nu - S^*)t + \sqrt{\xi(\nu - S^*)})} - \xi}{2(\xi^2 c + \xi^2 t)},$$

pre akékoľvek  $c$ , pre ktoré má uvedený výraz zmysel a pre ktoré navyše platí  $p(t) \geq 0$  pre  $\forall t \in \langle 0, t_l \rangle$ . Riešením počiatkovej úlohy (3.53) je

$$p(t) = \frac{(\xi p_0^2 - (\nu - S^*)) \left( \sqrt{\xi^2 - 4\mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t)} - \xi \right)}{2\xi(\xi^2 p_0^2 t - \xi(\nu - S^*)t + \sqrt{\xi(\nu - S^*)} - \xi p_0)},$$

kde funkcie  $\mathcal{A}(t)$ ,  $\mathcal{B}(t)$  sú  $\mathcal{A}(t) = \left( \frac{(\nu - S^*)(\sqrt{\xi(\nu - S^*)} - \xi p_0)}{\xi p_0^2 - (\nu - S^*)} + \xi(\nu - S^*)t + \sqrt{\xi(\nu - S^*)} \right)$  a  $\mathcal{B}(t) = \left( \xi^2(-t) - \frac{\xi(\sqrt{\xi(\nu - S^*)} - \xi p_0)}{\xi p_0^2 - (\nu - S^*)} \right)$ . Opäť musí pre našu počiatkovú cenu  $p_0$  platiť  $p(t) \geq 0$  na celom uvažovanom časovom intervale. Ak by táto podmienka bola porušená, postupujeme obdobne, ako pri riešení počiatkovej úlohy (3.49).



Obr. 26: Riešenie počiatkovej úlohy (3.53) v prípade (4) (Zdroj: vlastný)

Ak platí  $\nu - S^* = \frac{\eta^2}{4\xi}$  a zároveň  $p_0 > p^*$ , cena bude s postupom času klesať a blížíť sa ku hodnote  $p^*$ . V prípade, že počiatková cena je  $p_0 = p^*$ , cena ostáva v čase konštantná. Ak je však počiatková cena  $p_0 < p^*$ , cena bude s rastúcim  $t$  klesať až klesne na 0 a ustáli sa na tejto hodnote.

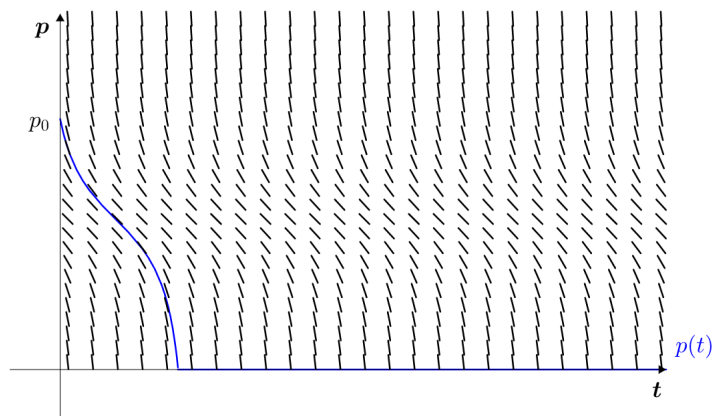
(5) Konštanta  $\nu - S^*$  je menšia ako  $\frac{\eta^2}{4\xi}$ , čiže dopyt pri nulovej cene je výrazne nižší ako ponuka. Rovnica (3.54) nemá žiadne reálne riešenie, preto ani diferenciálna rovnica (3.52) nebude mať žiadny stacionárny bod. Keď označíme  $C = \sqrt{4\xi(\nu - S^*) - \eta^2}$ , riešenie rovnice (3.52) je v tvare

$$p(t) = \frac{C \tan\left(\frac{1}{2}C(c+t)\right) - \eta}{2\xi},$$

pre každé  $c$ , pre ktoré má tento výraz zmysel a pre ktoré je cena nezáporná na celom uvažovanom intervale. Riešenie počiatkovej úlohy (3.53) bude

$$p(t) = \frac{C \tan\left(\arctan\left(\frac{2\xi p_0 C + \eta C}{4\xi(\nu - S^*) - \eta^2}\right) + \frac{1}{2}tC\right) - \eta}{2\xi}.$$

Ak pri našom  $p_0$  neplatí  $p(t) \geq 0, \forall t$ , musíme riešenie upraviť rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcich prípadoch.



Obr. 27: Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade (5) (Zdroj: vlastný)

Cena bude v tomto prípade s rastúcim  $t$  klesať pre akúkoľvek počiatocnú hodnotu a ustáli sa na 0.

**Príklad 3.37** Vezmime si produkt, ktorého ponuka je daná konštantnou funkciou  $S(p) = 5$  a dopyt  $D(p) = -p^2 + 3p + 5$ , a nech počiatocná cena  $p_0$  je rovná 2. Budeme uvažovať v časovom intervale 5 dní, teda  $t \in \langle 0, 5 \rangle$ .

Keďže  $\nu - S^* = 0$ , budeme mať dva stacionárne body

$$p_1^* = 3, p_2^* = 0.$$

Stacionárny bod  $p_1^*$  je asymptoticky stabilný a stacionárny bod  $p_2^*$  je nestabilný. Riešenie našej diferenciálnej rovnice bude v tvare

$$p(t) = \frac{3e^{3(t+c)}}{1 + e^{3(t+c)}},$$

kde  $c$  je akákoľvek reálna konštanta. Riešenie počiatocnej úlohy je

$$p(t) = \frac{6e^{3t}}{2e^{3t} + 1}.$$

Cena bude v tomto prípade s rastúcim časom rásť a konvergovať k hodnote 3.

### 3.4 Dopyt daný exponenciálnou funkciou

Posledným príkladom bude dopyt daný exponenciálnou funkciou

$$D(p) = \nu e^{\omega p},$$

kde  $\nu$  je opäť kladná konštanta predstavujúca maximálny dopyt a  $\omega$  je záporná konštanta. Takáto funkcia je typická pre produkt, ktorý má veľké množstvo substinentov, a teda je ľahko nahraditeľný, alebo nie je pre spotrebiteľa významný. Pri takomto produkte vyššia cena odradí veľké množstvo zákazníkov a dopyt klesá rýchlo.

Príkladom môže byť Coca-cola. Nepatrí medzi produkty ktoré spotrebiteľ nevyhnutne potrebuje a dá sa pomerne ľahko nahradiť inými produktmi, napríklad Pepsi alebo Kofo-lou. Preto rastúca cena Coca-coly veľmi rýchlo kupujúcich odradí.

Dosadením do rovnice (2.16) získame autonómnou diferenciálnu rovnicu

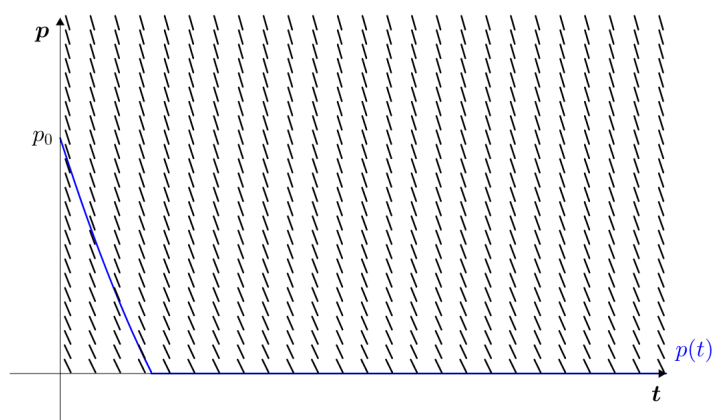
$$p'(t) = \gamma(\nu e^{\omega p} - S^*), \quad (3.55)$$

kde  $\nu$  je znovu kladná konštanta predstavujúca maximálny dopyt a  $\omega$  je záporná konštanta. Ak uvažujeme aj nad počiatočnou cenou  $p_0$  pre  $t = 0$ , dostaneme počiatočnú úlohu

$$p'(t) = \gamma(\nu e^{\omega p} - S^*), \quad p(0) = p_0. \quad (3.56)$$

Množstvo stacionárnych bodov tejto diferenciálnej rovnice bude závisieť od podielu  $\frac{S^*}{\nu}$ . Tento podiel je vždy kladný a môže byť **(1)** väčší ako 1, **(2)** rovný 1 alebo **(3)** menší ako 1.

**(1)** Podiel  $\frac{S^*}{\nu} > 1$ . Diferenciálna rovnica (3.55) má v obore reálnych čísel jeden stacionárny bod, ktorý je však záporný. My považujeme cenu za nezápornú veličinu a tak tento stacionárny bod nebudeme brať do úvahy.

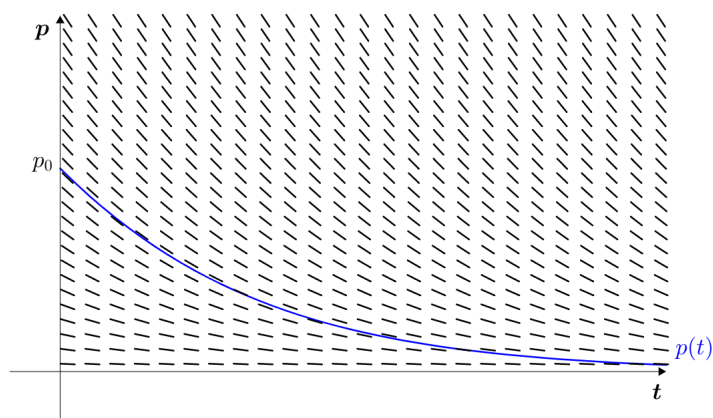


Obr. 28: Riešenie počiatočnej úlohy (3.56) v prípade **(1)** (Zdroj: vlastný)

V tomto prípade bude cena produktu s rastúcim časom klesať, až sa postupne ustáli na hodnote 0.

(2) V prípade  $S^* = \nu$  a teda  $\frac{S^*}{\nu} = 1$  má rovnica (3.55) opäť iba jeden asymptoticky stabilný stacionárny bod, a to

$$p^* = 0.$$

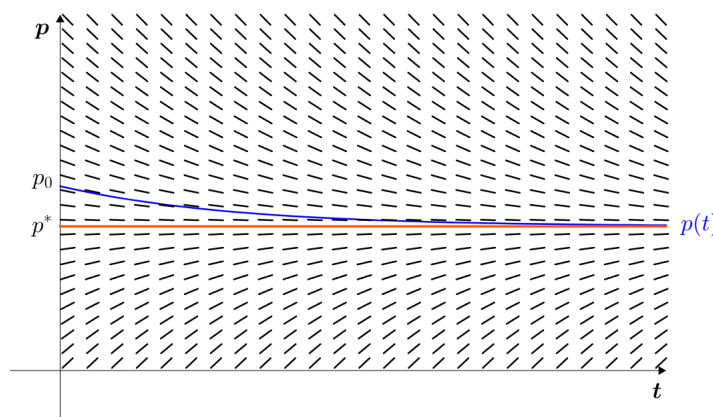


Obr. 29: Riešenie počiatkovej úlohy (3.56) v prípade (2) (Zdroj: vlastný)

Cena bude v čase klesať a konvergovať ku hodnote 0.

(3) Ak je podiel  $\frac{S^*}{\nu}$  menší ako 1 a zároveň kladný, rovnica (3.55) má jeden stacionárny bod, ktorý je opäť asymptoticky stabilný:

$$p^* = \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{S^*}{\nu} \right).$$



Obr. 30: Riešenie počiatkovej úlohy (3.56) v prípade (3) (Zdroj: vlastný)



Cena sa bude postupne v čase blížiť ku hodnote  $p^*$ .

Vo všetkých týchto prípadoch má diferenciálna rovnica (3.55) riešenie v tvare

$$p(t) = -\frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{\nu - e^{S^* \omega c + S^* \omega \gamma t}}{S^*} \right),$$

kde  $c$  je akákoľvek konštanta, pre ktorú je  $p(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in \langle 0, t_l \rangle$ . Riešením počiatočnej úlohy (3.56) je

$$p(t) = -\frac{1}{\omega} \ln \left( \left( e^{-\omega p_0} - \frac{\nu}{S^*} \right) e^{\omega S^* \gamma t} + \frac{\nu}{S^*} \right),$$

kde pre naše  $p_0$  znovu musí platiť  $p(t) \geq 0$  pre každé  $t$  nášho sledovaného časového intervalu. V prípade, že by to neplatilo, budeme postupovať rovnako ako v počiatočnej úlohe (3.49).

**Príklad 3.38** Nech je zadaná ponuka  $S(t) = S^* = 5$ , dopyt  $D(t) = 7e^{-0,25p}$ , počiatočná cena  $p_0 = 8$  a koeficient prispôsobenia sa  $\gamma = 0,15$ . Vývoj ceny budeme sledovať v priebehu 5 dní, takže  $t \in \langle 0, 5 \rangle$ .

Potom podiel  $\frac{5}{7} < 1$ , čiže bude existovať jeden asymptoticky stabilný stacionárny bod  $p^* \approx 1,3459$ . Riešenie našej diferenciálnej rovnice je

$$p(t) = 4 \ln \left( \frac{7 - e^{1,25c - 0,1875t}}{5} \right),$$

kde  $c \leq 0.5544$ . Riešenie počiatočnej úlohy potom bude

$$p(t) = 4 \ln \left( \left( e^{-2} - \frac{7}{5} \right) e^{-0,1875t} + \frac{7}{5} \right).$$

V tomto prípade cena v čase konverguje k hodnote stacionárneho bodu  $p^*$ .

## ZÁVER

V tejto práci sme sa zaoberali riešením ekonomických modelov za pomoci autonómnych diferenciálnych rovníc. Hlavným cieľom bolo zostavenie vybraných modelov a ich ďalšia analýza, pričom dôraz bol kladený na existenciu rovnovážnych riešení, ich kvalitatívne vlastnosti a ich význam z ekonomického pohľadu. Čiastkovým cieľom bolo oboznámiť čitateľa s problematikou diferenciálnych rovníc, ich sústav a riešení.

V práci sme postupne predstavili štyri vybrané ekonomické modely, konkrétne Walrasov model cenového prispôsobenia, Harrodov-Domarov model ekonomického rastu, Solowov-Swanov model ekonomického rastu a Goodwinov model hospodárskeho cyklu, popisujúce niektoré ekonomické veličiny. Vždy sme podrobne popísali zavedenie modelu, následne uviedli matematickú analýzu a ekonomickú interpretáciu výsledkov. Zameriavali sme sa na riešenie diferenciálnych rovníc, na ktoré viedli jednotlivé modely, stacionárne body týchto rovníc a ich vlastnosti. Výsledky sú zobrazené na grafoch vytvorených v softvare Geogebra. Pri každom modeli je uvedený konkrétny príklad z praxe.

Jeden z modelov, konkrétne Walrasov model cenového prispôsobenia, sme rozobrali do väčších podrobností. V rámci tohto modelu sme popísali vývoj ceny v čase pre rôzne typy funkcií dopytu pri konštantnej funkcii ponuky. Ukázali sme, ako rôzne druhy dopytovej funkcie vplývajú na existenciu rovnovážneho riešenia a ich stabilitu.

Na záver dodajme, že táto téma nie je ani zďaleka vyčerpaná. Je veľa iných druhov funkcií dopytu a ponuky, ktoré sa v rámci Walrasovho modelu cenového prispôsobenia dajú ďalej analyzovať. Obdobným spôsobom sa dajú modifikovať a následne podrobiť detailnej analýze aj ostatné študované modely.

## ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

- [1] GANDOLFO, G. *Economic dynamics: Methods and models*. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 1985. 571 s. ISBN 0-444-85419-3.
- [2] KALAS, J., M. RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012. 207 s. ISBN 978-80-210-5815-6.
- [3] LYNCH, S. *Dynamical systems with applications using MATLAB*. 2nd ed. Cham: Birkhäuser, 2014. 514 s. ISBN 978-3-319-06819-0.
- [4] TU, P. N. V. *Dynamical systems, An introduction with applications in economics and biology*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1994. 314 s. ISBN 3-540-57661-4.
- [5] Jan FRANČŮ. *Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2017 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu>
- [6] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Boston: Birkhauser, 1982. 647 s. ISBN 0-89871-510-5.
- [7] ZILL, D. G., W. S. WRIGHT, M. R. CULLEN. *Differential Equations with Boundary Value Problems*. 8th ed. Boston: Brooks/Cole, 2013. 673 s. ISBN 978-1-111-82706-9.
- [8] ČERMÁK, J., L. NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: CERM, 2016. 171 s. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [9] ŠVARC, I., M. ŠEDA, M. VITEČKOVÁ. *Automatické řízení*. 2. vyd. Brno: CERM, 2012. ISBN 978-80-214-4398-3.
- [10] JORDAN, D. W., P. SMITH. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction to Dynamical Systems*. 3rd ed. Oxford: Oxford University Press, 1999. 550 s. ISBN 0-19-856563-1.
- [11] TESCHL, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0.

- [12] OULIARIS, S. *What Are Economic Models?: How economists try to simulate reality*. FINANCE & DEVELOPMENT. 2011, 48(2), 46-47. ISSN 0015-1947.
- [13] NICHOLSON, W., C. SNYDER *Microeconomic theory: basic principles and extensions*. 10th ed. Belmont, CA: Thomson Business and Economics, 2008. 763 s. ISBN 03-244-2162-1.
- [14] KUČEROVÁ, V. *Makroekonomie I*. Brno: CERM, 2013. 126 s. ISBN: 978-80-214-4798- 1.
- [15] Zdeněk Pospíšil. *Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity* [online]. Brno: Masarykova Univerzita, 2015 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/pospisil/FILES/SDMi.pdf>
- [16] Advanced Macroeconomics - The Solow growth model. *Chair in Macroeconomics* [online]. Mainz: Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2010 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: [http://www.macro.economics.uni-mainz.de/Dateien/Solow\\_model.pdf](http://www.macro.economics.uni-mainz.de/Dateien/Solow_model.pdf)
- [17] MEZNÍK, I. *Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy*. Brno: CERM, 2011. 186 s. ISBN 978-80-2144-239-9.
- [18] GOODWIN, R. M. *Essays in Economic Dynamics*. London: The Macmillan Press, 1982. 182 s. ISBN 978-1-349-05506-7.

## ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK

$p(t)$	cena produktu v čase $t$
$D(p)$	dopyt po produkte pri cene $p$
$S(p)$	ponuka produktu pri cene $p$
$\mu$	ponuka pri nulovej cene
$\phi$	sklon krivky ponuky
$\nu$	dopyt pri nulovej cene
$\psi$	sklon krivky dopytu
$E(p)$	prebytok dopytu
$\gamma$	koeficient cenového prispôsobenia sa
$Q(t)$	produkcia v čase $t$
$K(t)$	kapitál v čase $t$
$I(t)$	investície v čase $t$
$a$	koeficient amortizácie
$S$	úspory
$s$	koeficient úspor
$r(t)$	kapitálová náročnosť jednotky produkcie v čase $t$
$\sigma(t)$	produktivita práce v čase $t$
$v(t)$	relatívna zamestnanosť v čase $t$
$u(t)$	podiel mzdy na produkcii v čase $t$

## ZOZNAM TABULIEK

1	Typ stacionárneho bodu $(y^*, z^*)$ podľa $\mathcal{D}$ a $\tau$ (Zdroj: vlastný) . . . . .	23
2	Množstvo zamestnancov a ich prínos (Zdroj: vlastný) . . . . .	36

## ZOZNAM OBRÁZKOV

1	Fázový portrét rovnice $y'(t) = (1 + y)$ , $y(t_0) = y_0$ (Zdroj: vlastný) . . . .	16
2	Klasifikácia stacionárnych bodov (Zdroj: vlastný) . . . . .	18
3	Stacionárny bod typu stred (Zdroj: vlastný) . . . . .	21
4	Stacionárny bod typu príťažlivé (vľavo) a odpudivé (vpravo) ohnisko (Zdroj: vlastný) . . . . .	22
5	Stacionárny bod typu príťažlivý (vľavo) a odpudivý (vpravo) uzol (Zdroj: vlastný) . . . . .	22
6	Stacionárny bod typu sedlo (Zdroj: vlastný) . . . . .	23
7	Riešenie počiatocnej úlohy (2.18) pre $p_0 > p^*$ (Zdroj: vlastný) . . . . .	27
8	Riešenie počiatocnej úlohy (2.25) v prípade (1) (Zdroj: vlastný) . . . . .	31
9	Riešenie počiatocnej úlohy (2.25) v prípade (2) (Zdroj: vlastný) . . . . .	32
10	Riešenie počiatocnej úlohy (2.25) v prípade (3) (Zdroj: vlastný) . . . . .	33
11	Vývin riešenia $\kappa(t)$ v prípade (1) (Zdroj: vlastný) . . . . .	40
12	Vývin riešenia $\kappa(t)$ v prípade (2) (Zdroj: vlastný) . . . . .	40
13	Vývin riešenia $\kappa(t)$ v prípade (3) (Zdroj: vlastný) . . . . .	41
14	Izokvanty Leontiefovej produkčnej funkcie (Zdroj: vlastný) . . . . .	41
15	Izokvanty Leontiefovej produkčnej funkcie v intenzívnom tvare (Zdroj: vlastný) . . . . .	42
16	Stacionárny bod $(u^*, v^*)$ (Zdroj: vlastný) . . . . .	48
17	Riešenie počiatocnej úlohy (3.49) v prípade (1) (Zdroj: vlastný) . . . . .	51
18	Riešenie počiatocnej úlohy (3.49) v prípade (2) (Zdroj: vlastný) . . . . .	51
19	Riešenie počiatocnej úlohy (3.49) v prípade (3) (Zdroj: vlastný) . . . . .	52
20	Riešenie počiatocnej úlohy (3.51) v prípade (1) (Zdroj: vlastný) . . . . .	54
21	Riešenie počiatocnej úlohy (3.51) v prípade (2) (Zdroj: vlastný) . . . . .	55
22	Riešenie počiatocnej úlohy (3.51) v prípade (3) (Zdroj: vlastný) . . . . .	56
23	Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade (1) (Zdroj: vlastný) . . . . .	58
24	Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade (2) (Zdroj: vlastný) . . . . .	59
25	Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade (3) (Zdroj: vlastný) . . . . .	60
26	Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade (4) (Zdroj: vlastný) . . . . .	61

27	Riešenie počiatocnej úlohy (3.53) v prípade <b>(5)</b> (Zdroj: vlastný) . . . . .	62
28	Riešenie počiatocnej úlohy (3.56) v prípade <b>(1)</b> (Zdroj: vlastný) . . . . .	63
29	Riešenie počiatocnej úlohy (3.56) v prípade <b>(2)</b> (Zdroj: vlastný) . . . . .	64
30	Riešenie počiatocnej úlohy (3.56) v prípade <b>(3)</b> (Zdroj: vlastný) . . . . .	64